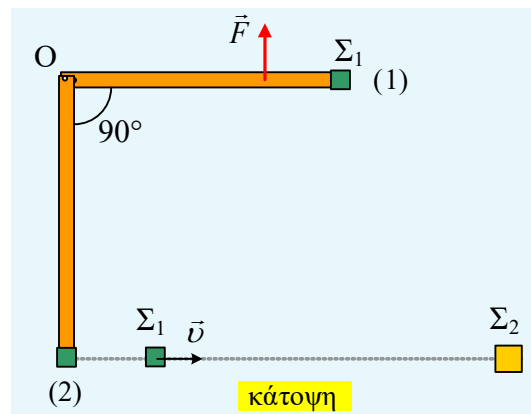


Περιστροφή ράβδου και μια κρούση υλικών σημείων

Η ράβδος του σχήματος, μήκους $l=2\text{m}$ μπορεί να στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο, γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της O , ενώ στο άλλο της άκρο έχει προσκολληθεί ένα σώμα Σ_1 , μάζας $m_1=1\text{kg}$. Η ράβδος είναι αρχικά ακίνητη στη θέση (1), ενώ τη στιγμή $t=0$, δέχεται κατάλληλη δύναμη F , η ροπή της οποίας, της προσδίδει σταθερή γωνιακή επιτάχυνση. Μόλις η ράβδος περνά από την θέση (2) για δεύτερη φορά, το σώμα Σ_1 αποκολλάται και στη συνέχεια κινείται ευθύγραμμα στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και αφού διανύσει απόσταση $d=3,5\text{m}$, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά, με ένα σώμα Σ_2 , μάζας $m_2=2\text{kg}$, το οποίο είναι ακίνητο. Τελικά τα δυο σώματα ηρεμούν, απέχοντας μεταξύ τους απόσταση $S=2,5\text{m}$. Να υπολογιστούν:



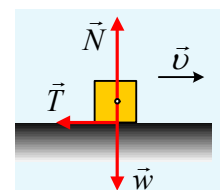
- i) Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων, αμέσως μετά την ελαστική μεταξύ τους κρούση.
- ii) Η ταχύτητα του σώματος Σ_1 , την στιγμή που αποχωρίζεται τη ράβδο.
- iii) Η χρονική στιγμή t_1 της αποκόλλησης του σώματος Σ_1 .
- iii) Η επιτάχυνση του σώματος Σ_1 ελάχιστα πριν την αποκόλλησή του από την ράβδο, στην διεύθυνση της ταχύτητας. Ποια η αντίστοιχη επιτάχυνση στην κάθετη διεύθυνση;

Δίνεται η γωνία $\varphi=90^\circ$, που σχηματίζουν οι δυο παραπάνω θέσεις της ράβδου (1) και (2), οι διαστάσεις των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 θεωρούνται αμελητέες, ενώ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των σωμάτων και του επιπέδου $\mu=0,1$. Εξάλλου $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Για ένα σώμα που ξεκινά με αρχική ταχύτητα u στο οριζόντιο επίπεδο, λόγω της τριβής που δέχεται, θα σταματήσει μετά από λίγο, αφού διανύσει απόσταση s . Εφαρμόζοντας για το σώμα αυτό το Θ.Μ.Κ.Ε. παίρνουμε:

$$K_\tau - K_\alpha = W_w + W_N + W_T \xrightarrow{K_\tau = W_w = W_N = 0} -\frac{1}{2}mu^2 = -Ts \rightarrow \frac{1}{2}mu^2 = \mu mgs \rightarrow s = \frac{u^2}{2\mu g} \quad (1)$$



Αν το σώμα Σ_1 ελάχιστα πριν την κρούση έχει ταχύτητα v_1 , τότε μετά την κρούση, τα σώματα αποκτούν ταχύτητες:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2) \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (3) \xrightarrow{(2):(3)} \frac{v_1'}{v_2'} = \frac{m_1 - m_2}{2m_1} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2} \rightarrow v_2' = -2v_1' \quad (4)$$

Επειδή $m_1 < m_2$ από την (2) προκύπτει ότι $v_1' < 0$, οπότε τα δύο σώματα θα κινηθούν αντίθετα διανύοντας

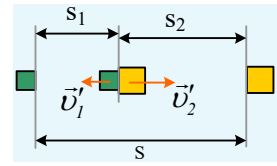
αποστάσεις s_1 και s_2 . όπως στο σχήμα. Οπότε λαμβάνοντας υπόψη μας την σχέση (1), θα έχουμε:

$$s_1 + s_2 = S \rightarrow \frac{v_1'^2}{2\mu g} + \frac{v_2'^2}{2\mu g} = S \rightarrow \frac{v_1'^2 + 4v_1'^2}{2\mu g} = S \rightarrow$$

$$|v_1'| = \sqrt{\frac{2\mu g S}{5}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,1 \cdot 10 \cdot 2,5}{5}} m/s = 1 m/s \rightarrow$$

$$v_1' = -1 m/s \xrightarrow{(4)}$$

$$v_2' = 2 m/s$$



ii) Από την εξίσωση (2) υπολογίζουμε την ταχύτητα του σώματος Σ_1 , ελάχιστα πριν την κρούση:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \rightarrow$$

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} v_1' = \frac{1 + 2}{1 - 2} (-1) m/s = 3 m/s$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για το σώμα Σ_1 από την θέση (2) όπου αυτό εγκαταλείπει τη ράβδο, μέχρι την θέση, ελάχιστα πριν την κρούση:



$$K_\tau - K_\alpha = W_w + W_N + W_T \xrightarrow{W_w = W_N = 0}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m v_o^2 = -T d \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m v_o^2 = -\mu m_1 g d \rightarrow$$

$$v_o = \sqrt{v_1^2 + 2\mu g d} = \sqrt{3^2 + 2 \cdot 0,1 \cdot 10 \cdot 3,5} m/s = \sqrt{16} m/s = 4 m/s$$

iii) Η παραπάνω ταχύτητα του σώματος Σ_1 , είναι ίση με την γραμμική ταχύτητα του άκρου της ράβδου, η οποία συνδέεται με την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής με τη σχέση:

$$v_o = \omega_1 l \rightarrow \omega_1 = \frac{v_o}{l} = \frac{4}{2} rad/s = 2 rad/s$$

Η ράβδος από 0-t₁ διαγράφει γωνία $\theta = 2\pi + 3\pi/2 = 3,5\pi$ rad. Για την επιταχυνόμενη στροφική κίνηση του στερεού ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\omega_1 = \alpha_\gamma t \quad (5) \quad \text{και} \quad \theta = \frac{1}{2} \alpha_\gamma t^2 \quad (6)$$

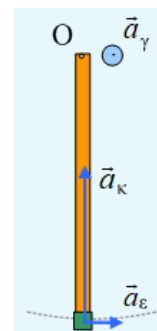
Με απαλοιφή της γωνιακής επιτάχυνσης από τις παραπάνω σχέσεις, παίρνουμε:

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{\omega_1}{t} t^2 = \frac{1}{2} \omega_1 t_1 \rightarrow$$

$$t_1 = \frac{2\theta}{\omega_1} = \frac{2 \cdot 3,5\pi}{2} s = 3,5\pi s = 11 s$$

iv) Από την εξίσωση (5) βρίσκουμε:

$$\omega_1 = \alpha_\gamma t_1 \rightarrow \alpha_\gamma = \frac{\omega_1}{t_1} = \frac{2}{3,5\pi} rad/s^2$$



Το σώμα Σ_1 , ελάχιστα πριν την αποχώρησή του από την ράβδο, έχει μια επιτροχία επιτάχυνση και μια κε-

ντρομόλο επιτάχυνση, όπως στο σχήμα. Για τα μέτρα τους έχουμε:

$$\alpha_{\varepsilon} = \alpha_{\gamma} l = \frac{2}{3,5\pi} \cdot 2 \text{ m/s}^2 = 0,36 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha_{\kappa} = \omega^2 R = 2^2 \cdot 2 \text{ m/s}^2 = 8 \text{ m/s}^2.$$

dmargaris@gmail.com