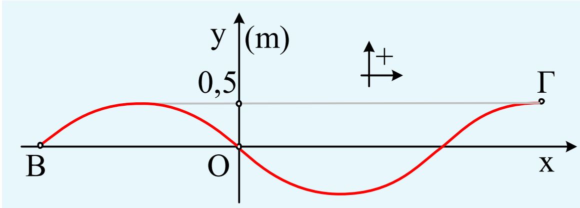
Ένα κύμα σε τμήμα χορδής



Στο σχήμα βλέπετε ένα τμήμα μήκους d=5m, μιας ελαστικής χορδής, μεταξύ των σημείων Β και Γ, κάποια χρονική στιγμή την οποία θεωρούμε t=0, όταν πάνω της διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα, προς τα δεξιά (το κύμα έχει διαδοθεί και πέρα από το σημείο Γ, ενώ η πηγή του είναι κάποιο σημείο αριστερότερα του σημείου Β). Τη στιγμή αυτή το σημείο Γ έχει μηδενική ταχύτητα ταλάντωσης. Αν το σημείο Β, φτάσει για πρώτη φορά σε απομάκρυνση 0,5m τη χρονική στιγμή t_1=1,5s, μετά τη στιγμή t=0, ζητούνται:

i) Η ταχύτητα του κύματος και η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Β, τη στιγμή t=0.

ii) Να γίνει η γραφική παράσταση της ταχύτητας του σημείου Β σε συνάρτηση με το χρόνο, από t=0, μέχρι τη στιγμή t_2=2,5s.

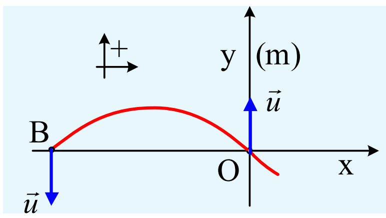
iii) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος, με βάση τα παραπάνω δεδομένα, για το παραπάνω τμήμα της χορδής.

iv) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος για την ίδια περιοχή, τη χρονική στιγμή t_2.

Απάντηση:

i) Με βάση το διάγραμμα το μήκος d της χορδής αντιστοιχεί σε λ+λ/4= 5λ/4, όπου λ το μήκος του κύματος. Αλλά τότε:

$$d = \frac{5}{4}\lambda \to \lambda = \frac{4}{5}5 = 4m$$



Το κύμα είναι τρέχον και διαδίδεται προς τα δεξιά, οπότε το σημείο Ο, κινείται προς τα πάνω, αφού θα πρέπει να βρεθεί σε θετική απομάκρυνση, όπως τη στιγμή αυτή (t=0) βρίσκονται τα σημεία στα αριστερά του. Όμως το σημείο Β προηγείται κατά λ/2 του Ο, άρα θα έχει μεγαλύτερη φάση απομάκρυνσης από το Ο, κατά Δφ=π rad, με αποτέλεσμα να έχει την ίδια απομάκρυνση με το Ο, αλλά αντίθετη ταχύτητα, όπως στο σχήμα. Έτσι θα χρειαστεί χρονικό διάστημα Δt= 3/4 Τ για να φτάσει στη θέση y=+A (Τ/4 για την θέση y=-A, άλλο ένα Τ/4 για να επιστρέψει στην θέση y=0 και Τ/4 για να φτάσει στην θέση y=+A). Συνεπώς θα έχουμε:

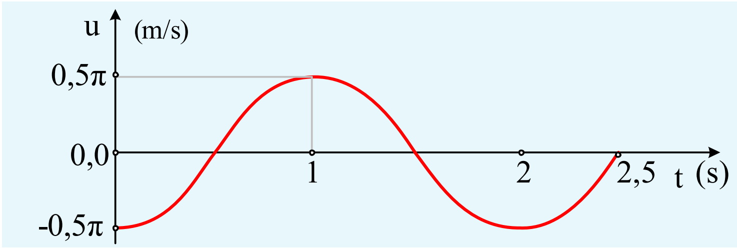
$$t_1 = \frac{3}{4}T \to T = \frac{4}{3}1{,}5s = 2s \to$$

$$\upsilon = \lambda f = \frac{\lambda}{T} = \frac{4m}{2s} = 2m/s$$

όπου υ η ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Ενώ για την ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Β έχουμε:

$$u = -\omega A = -\frac{2\pi}{T}A = -\frac{2\pi}{2}0,5m/s = -0,5\pi \ m/s$$

ii) Με βάση τα παραπάνω, το σημείο Β για t=0 κινείται με αρνητική ταχύτητα (μέγιστου μέτρου), ενώ η ταχύτητα αυτή μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο. Αλλά τότε η γραφική παράσταση της ταχύτητάς του, σε συνάρτηση με το χρόνο (και χωρίς να μπλέξουμε με συναρτήσεις!!!), θα έχει την μορφή:



(Μπορούμε να καταλήξετε στην παραπάνω γραφική παράσταση, αφού πρώτα βρούμε την συνάρτηση *u=f(t)*. Μπορείτε να το κάνετε;)

iii) Παίρνοντας σαν σημείο αναφοράς μας το σημείο Ο, στη θέση x=0, αυτό τη στιγμή t=0 περνά από την θέση ισορροπίας του κινούμενο με θετική ταχύτητα, αλλά τότε έχει όλες τις προϋποθέσεις, που θέτει το σχολικό βιβλίο για την γνωστή μας εξίσωση κύματος:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \rightarrow$$

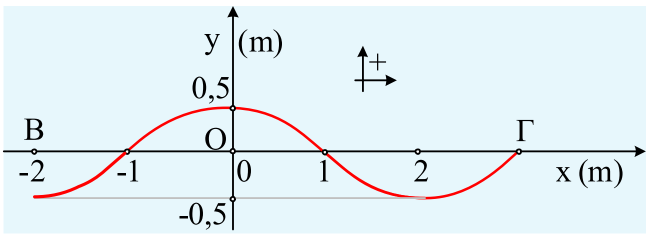
$$y = 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4}\right) \ (S.I.) \ \mu\varepsilon \ -2m \le x \le 3m$$

iv) Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση t=2,5s, παίρνουμε:

$$y = 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4}\right) = 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{2,5}{2} - \frac{x}{4}\right) = 0,5 \cdot \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right) \rightarrow$$

$$y = 0,5 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{x}{4}\right) \quad \mu\varepsilon \ -2m \le x \le 3m$$

Κάνοντας την γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης, παίρνουμε το διάγραμμα:



dmargaris@gmail.com