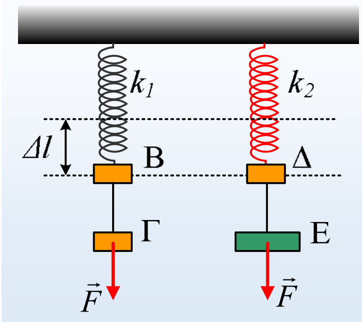
Πλάτη και περίοδοι σε δυο ταλαντώσεις

Στο σχήμα βλέπετε τέσσερα σώματα Β, Γ, Δ και Ε, τα οποία ηρεμούν στο κάτω άκρο δύο ιδανικών ελατηρίων με σταθερές k_1 και k_2, τα οποία έχουν το ίδιο φυσικό μήκος l_0. Τα σώματα έχουν μάζες $m_B=m_Γ=m_Δ=m$ και $m_E=3m$, ενώ με την άσκηση κατακόρυφης δύναμης μέτρου F=mg στα σώματα Γ και Ε, τα ελατήρια έχουν το ίδιο μήκος. Κάποια στιγμή καταργώντας την δύναμη F τα δυο συστήματα σωμάτων (Β-Γ και Δ-Ε) εκτελούν αατ.



i) Οι σταθερές των δύο ελατηρίων συνδέονται με την σχέση:

$$α)\ \frac{k_1}{k_2}=0{,}4, \quad β)\ \frac{k_1}{k_2}=0{,}5, \quad γ)\ \frac{k_1}{k_2}=0{,}6.$$

ii) Για τα πλάτη των δύο ταλαντώσεων ισχύει:

α) $A_1 < A_2$, β) $A_1 = A_2$, γ) $A_1 > A_2$.

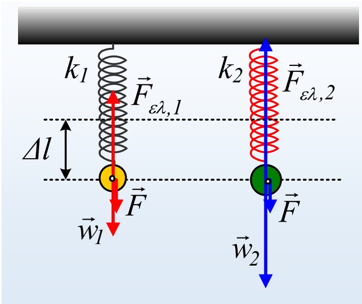
iii) Για τις περιόδους των δύο ταλαντώσεων ισχύει:

α) $T_1 < T_2$, β) $T_1 = T_2$, γ) $T_1 > T_2$.

iv) Να εξετάσετε αν, κατά τη διάρκεια των ταλαντώσεων, κάποιο από τα νήματα που συνδέει τα σώματα Β-Γ και Δ-Ε χαλαρώσει.

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουμε αντικαταστήσει (για ευκολία…) τα επιμέρους σώματα Β-Γ και Δ-Ε με υλικά σημεία με μάζες $m_1=2m$ και $m_2=4m$, στα οποία έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω τους. Από την ισορροπία κάθε τέτοιου υλικού σημείου, παίρνουμε:



$$ΣF_1=0 \rightarrow F_{ελ,1}-w_1-F=0 \rightarrow k_1\cdot Δl=3mg \ (1)$$

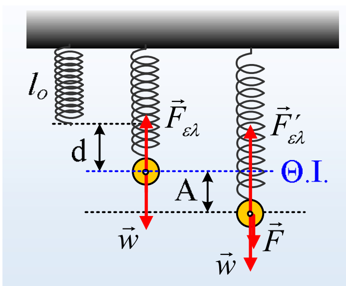
$$ΣF_2=0 \rightarrow F_{ελ,2}-w_2-F=0 \rightarrow k_2\cdot Δl=5mg \ (2)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) παίρνουμε:

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{3mg}{5mg}=0{,}6$$

Σωστό το γ).

ii) Ένα σώμα βάρους w, δεμένο στο άκρο του κατακόρυφου ελατηρίου, το οποίο βρίσκεται στην θέση ισορροπίας (Θ.Ι.), έχει επιμηκύνει το ελατήριο κατά d, όπου:



$$ΣF=0 \rightarrow F_{ελ}-w=0 \rightarrow k\cdot d=w \ (3)$$

Ενώ όταν ασκείται πάνω μια κατακόρυφη δύναμη F, όπως στο δεύτερο σχήμα, προκαλεί μια επιπλέον επιμήκυνση, ίση με το πλάτος ταλάντωσης, όταν αφεθεί να κινηθεί, αφού το σώμα ξεκινά να κινείται από την ακραία θέση της ταλάντωσής του, με μηδενική ταχύτητα. Τότε, πριν αφεθεί να κινηθεί θα έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \to F'_{\varepsilon\lambda} - w - F = 0 \to k\cdot(d + A) = w + F \xrightarrow{(3)}$$

$$w + k\cdot A = w + F \to A = \frac{F}{k}$$

Έτσι στην περίπτωση των σωμάτων Β και Γ, έχουμε πλάτος $A_1 = \frac{F}{k_1}$, ενώ $A_2 = \frac{F}{k_2}$. Αλλά με βάση το προηγούμενο ερώτημα $k_1 < k_2$, οπότε $A_1 > A_2$. Σωστό το γ).

iii) Για τις περιόδους των δύο συστημάτων, θα έχουμε:

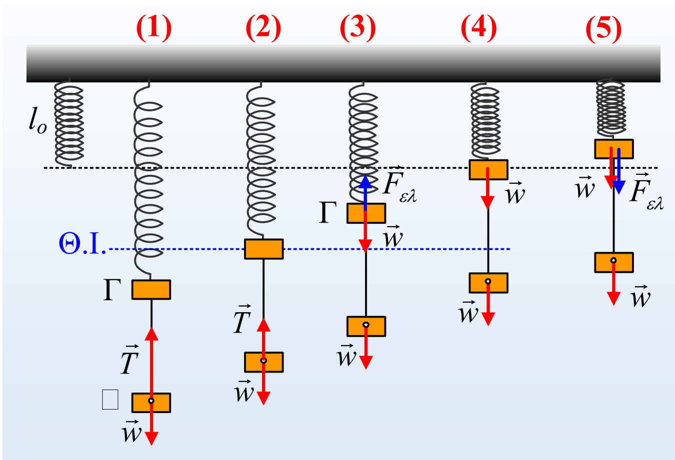
$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k_1}} \quad \text{και} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{4m}{k_2}}$$

Με διαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{2m}{k_1}\Big/\frac{4m}{k_2}} = \sqrt{\frac{2mk_2}{4mk_1}} = \sqrt{\frac{k_2}{2k_1}} = \sqrt{\frac{k_2}{1{,}2k_2}} = \frac{1}{\sqrt{1{,}2}} < 1$$

Σωστό το α).

iv) Ας δούμε αναλυτικά τι συμβαίνει με την τάση του νήματος, παίρνοντας το πρώτο σύστημα σε διάφορες θέσεις, όπως στο σχήμα:



Στη θέση (1) το σώμα Γ (ομοίως και το Β) είναι κάτω από την θέση ισορροπίας του. Τότε η συνισταμένη δύναμη σε κάθε σώμα, πρέπει να είναι δύναμη επαναφοράς με κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας. Αλλά αυτό σημαίνει ότι η τάση του νήματος που ασκείται στο σώμα Β είναι μεγαλύτερη του βάρους και προφανώς το νήμα είναι τεντωμένο.

Στη θέση (2) τα σώματα περνούν από την θέση ισορροπίας τους και T=w, οπότε το νήμα είναι τεντωμένο.

Η θέση (3) είναι πάνω από την θέση ισορροπίας, αλλά με μήκος ελατηρίου $l > l_o$. Αν υποθέσουμε ότι T=0, τότε η επιτάχυνση του σώματος Β, θα είναι ίση με g, ενώ η επιτάχυνση του Γ θα έχει μικρότερο μέτρο, αφού η $F_{\varepsilon\lambda}$ έχει φορά προς τα πάνω. Πράγμα άτοπο, οπότε το νήμα είναι τεντωμένο και $T \neq 0$.

Στη θέση (4) το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του, οπότε μηδενίζεται και η τάση του νήματος, οπότε και τα δυο σώματα έχουν στιγμιαία επιτάχυνση ίση με g. Αν κάποιος σχεδιάσει τάση νήματος, τότε το σώμα Γ θα είχε επιτάχυνση μεγαλύτερη του g και το Β μικρότερη από g και το ελατήριο δεν θα ήταν τεντωμένο!

Και φτάνουμε στη θέση (5) με το ελατήριο συσπειρωμένο. Τότε το σώμα Γ αποκτά επιτάχυνση με μέτρο $α_Γ>g$, πράγμα που δεν μπορεί να συμβεί για το σώμα Β, το οποίο έχει επιτάχυνση g και το νήμα έχει χαλαρώσει.

Συμπέρασμα, το ελατήριο οριακά παύει να είναι τεντωμένο στην θέση που το ελατήριο αποκτά το φυσικό μήκος του.

Οπότε ας εξετάσουμε τι συμβαίνει τώρα με τα δυο συστήματά μας.

Το σώμα Β θα ανέβη κατά $h_1 = 2A_1 = \frac{2F}{k_1} = \frac{2mg}{k_1} < \Delta l$, αφού με βάση την (3) $\Delta l = \frac{3mg}{k_1}$.

Άρα το ελατήριο συνεχίζει να έχει επιμήκυνση και το νήμα παραμένει πάντα τεντωμένο.

Για το σώμα Δ, αυτό θα ανέβει κατά $h_2 = 2A_2 = 2\frac{F}{k_2} = \frac{2mg}{k_2} < \Delta l$ αφού τώρα με βάση την (4) $\Delta l = \frac{5mg}{k_1}$.

Συνεπώς και πάλι το ελατήριο θα έχει επιμήκυνση, σε όλη τη διάρκεια της ταλάντωσής του και το νήμα δεν θα χαλαρώσει.

dmargaris@gmail.com