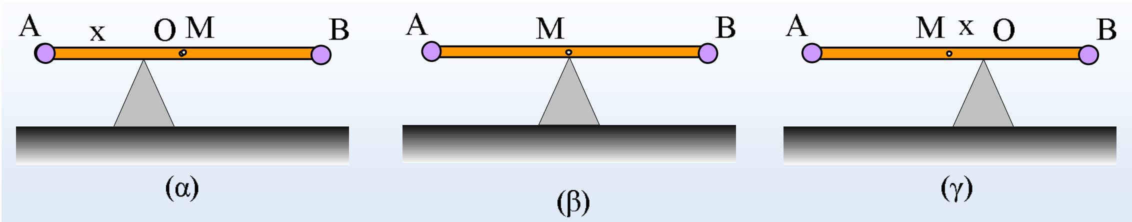
Ισορροπία και κέντρο μάζας στερεού

Στα άκρα Α και Β μιας λεπτής ομογενούς ράβδου μήκους l και μάζας M=3m, έχουν προσδεθεί δυο σημειακές σφαίρες με μάζες m_A=2m και m_B=m, δημιουργώντας ένα στερεό S. Το στερεό S ισορροπεί, με την ράβδο σε οριζόντια θέση, στηριζόμενο σε τρίποδο.

i) Ποιο από τα παρακάτω σχήματα δείχνει την ισορροπία του στερεού S;



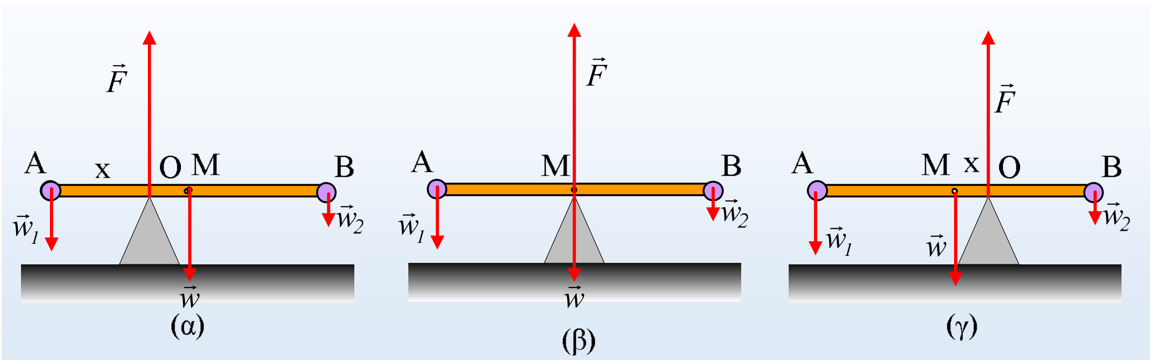
ii) Το κέντρο μάζας Ο του στερεού S, απέχει από το άκρο του Α της ράβδου κατά:

$$\alpha)\ x=\frac{4}{12}l,\quad \beta)\ x=\frac{5}{12}l,\qquad \gamma)\ x=\frac{6}{12}l,\quad \delta)\ x=\frac{7}{12}l,$$

iii) Μετακινούμε το τρίποδο ώστε το στερεό να στηρίζεται σε σημείο Γ, όπου (ΑΓ)=0,3l, οπότε για να εξασφαλίζεται η ισορροπία σε οριζόντια θέση της ράβδου, ασκούμε στο άκρο Α μια κατακόρυφη δύναμη F_1. Να σχεδιάσετε την δύναμη F_1 στο σχήμα, υπολογίζοντας και το μέτρο της.

Απάντηση:

i) Το σωστό σχήμα είναι το (α). Το στερεό πρέπει να στηριχθεί σε σημείο μεταξύ Α και Μ, αφού η σφαίρα στο άκρο Α, έχει μεγαλύτερη μάζα και η ροπή του βάρους της, ως προς το σημείο στήριξης, μπορεί να εξουδετερώσει τις δυο άλλες ροπές. Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στο στερεό και στις τρεις περιπτώσεις, όπου F η δύναμη από το τρίποδο.



Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το σχήμα (β). Τότε παίρνοντας τις ροπές ως προς το Μ θα έχουμε (οι αριστερόστροφες ροπές θετικές):

$$\Sigma\tau = F\cdot 0 + w\cdot 0 + 2mg\cdot\frac{l}{2} - mg\cdot\frac{l}{2} = mg\cdot\frac{l}{2} \neq 0$$

Με την ίδια λογική για την κατάσταση στο σχήμα (γ) θα έχουμε για τις ροπές ως προς το Ο:

$$\Sigma\tau = F\cdot 0 + 3mg\cdot x + 2mg\cdot\left(\frac{l}{2}+x\right) - mg\cdot\left(\frac{l}{2}-x\right) \rightarrow$$

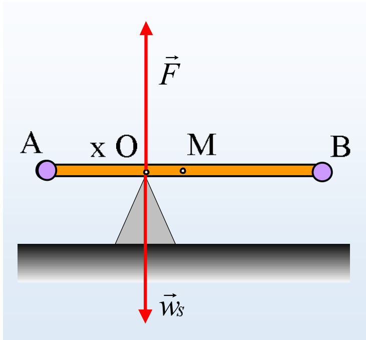
$$\Sigma\tau = 3mg \cdot x + 2mg \cdot \frac{l}{2} + 2mg \cdot x - mg \cdot \frac{l}{2} + mg \cdot x = 6mg \cdot x + mg \cdot \frac{l}{2} > 0$$

ii) Παίρνοντας τώρα τη συνθήκη ισορροπίας για το στερεό στο σχήμα (α), ως προς το Ο, θα έχουμε:

$$\Sigma\tau = 0 \rightarrow 2mg \cdot x + F \cdot 0 - 3mg \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) - mg \cdot (l - x) = 0 \rightarrow$$

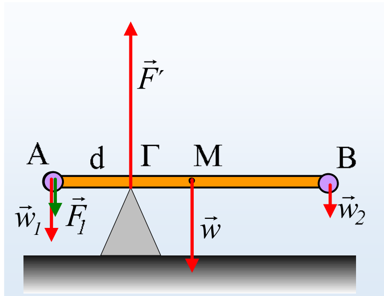
$$2x - 3\frac{l}{2} + 3x - l + x = 0 \rightarrow x = \frac{5l}{12}$$

Αλλά τότε θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε τα τρία βάρη με ένα, το βάρος του στερεού, το οποίο πρέπει να περνά από ένα σημείο Κ (το κέντρο μάζας) στην κατακόρυφη τομή της ράβδου στο σημείο Ο, αφού μόνο τότε στο στερεό ασκούνται δύο συγγραμμικές δυνάμεις οι οποίες δίνουν μηδενική συνισταμένη και μηδενική ροπή ως προς το Ο. Οπότε και το σημείο Κ απέχει κατά x από το άκρο Α.



Σωστό το (β).

iii) Αν μετακινήσουμε το στήριγμα πιο αριστερά από την παραπάνω θέση Ο, τότε το στερεό τείνει να περιστραφεί δεξιόστροφα, οπότε για την ισορροπία θα πρέπει να ασκήσουμε κατακόρυφη δύναμη F_1 με φορά προς τα κάτω, όπως στο διπλανό σχήμα. Πράγματι παίρνοντας ξανά τις ροπές ως προς το Γ, για την ισορροπία του στερεού, θα έχουμε:



$$\Sigma\tau = 0 \rightarrow \tau_{w_1} + \tau_{F_1} + \tau_{F'} + \tau_w + \tau_{w_2} = 0$$

$$2mg \cdot d + F_1 \cdot d - 3mg \cdot \left(\frac{l}{2} - d\right) - mg \cdot (l - d) = 0 \xrightarrow{d=0,3l}$$

$$2mg \cdot 0{,}3l + F_1 \cdot 0{,}3l - 3mg \cdot 0{,}2l - mg \cdot 0{,}7l = 0 \rightarrow$$

$$F_1 = \frac{7}{3}mg$$

dmargaris@gmail.com