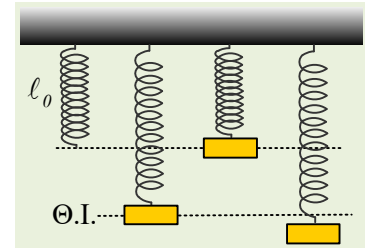


Ας δούμε λίγο και μια φθίνουσα ταλάντωση

Ένα σώμα Σ μάζας 2kg ηρεμεί δεμένο στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k , προκαλώντας του επιμήκυνση $0,4\text{m}$, όπως στο σχήμα. Ανεβάζουμε το σώμα κατακόρυφα κατά $0,4\text{m}$ και σε μια στιγμή $t_0=0$, το αφήνουμε να εκτελέσει κατακόρυφη ταλάντωση, ενώ δέχεται και δύναμη απόσβεσης τη μορφής $F_{\text{απ}}=-b\cdot v=-0,2v$ (μονάδες στο S.I.).



i) Να υπολογισθεί η αρχική ενέργεια ταλάντωσης, καθώς και η αρχική επιτάχυνση του σώματος.

Σε μια στιγμή t_1 το σώμα έχει επιμηκύνει το ελατήριο κατά $0,5\text{m}$, έχοντας ταχύτητα μέτρου $|v_1|=1\text{m/s}$.

ii) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης απόσβεσης από την στιγμή t_0 μέχρι τη στιγμή t_1 .

iii) Για την στιγμή t_1 να υπολογιστούν:

- A) Η επιτάχυνση του σώματος.
- B) Οι ρυθμοί μεταβολής:
 - a) της δυναμικής ενέργειας,
 - b) της κινητικής ενέργειας και
 - c) της ενέργειας ταλάντωσης του σώματος.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

Το σώμα ηρεμούσε αρχικά στην θέση ισορροπίας του, ίδια με την θέση ισορροπίας (η θέση $x=0$), γύρω από την οποία θα ταλαντωθεί και ίδια, με την θέση που τελικά θα ηρεμήσει, αφού ολοκληρωθεί η φθίνουσα ταλάντωσή του. Στη θέση αυτή θα ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \xrightarrow{\text{μέτρα}} F_{\varepsilon\lambda} = w \rightarrow k\Delta l = mg \rightarrow$$

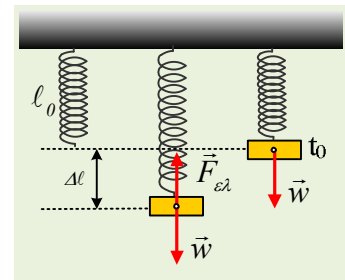
$$k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{2 \cdot 10}{0,4} \text{N/m} = 50 \text{N/m}$$

i) Αφού το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του από μια θέση που απέχει κατά $0,4\text{m}$, από την θέση ισορροπίας, την στιγμή t_0 , το αρχικό πλάτος ταλάντωσης θα είναι ίσο με $A_0=0,4\text{m}$ και η αρχική ενέργεια ταλάντωσης θα είναι ίση:

$$E_0 = \frac{1}{2} k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2} 50 \cdot 0,4^2 \text{J} = 4\text{J}$$

Εξάλλου η αρχική ταχύτητα του σώματος είναι μηδενική, οπότε μηδενική θα είναι και η δύναμη απόσβεσης. Αλλά τότε η μόνη δύναμη που ασκείται πάνω του είναι το βάρος και το σώμα αποκτά επιτάχυνση ίση με g , αφού:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow mg = ma \rightarrow a = g$$



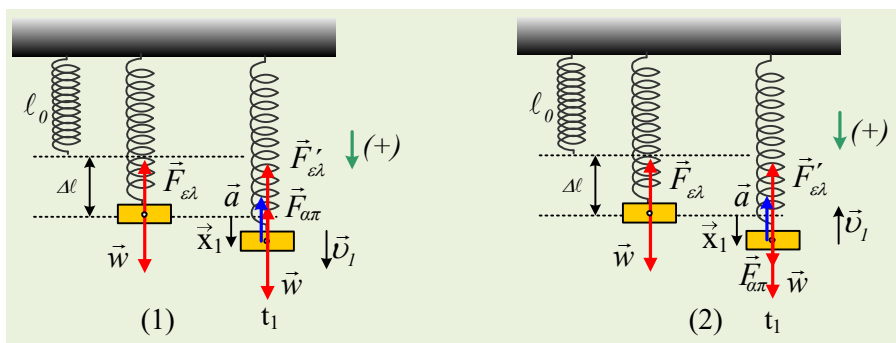
ii) Μέσω του έργου της δύναμης απόσβεσης αφαιρείται ενέργεια από το ταλαντούμενο σύστημα, με αποτέλεσμα να μειώνεται το πλάτος και η ταλάντωση να καθίσταται φθίνουσα. Αλλά τότε όσο είναι η μείωση της ενέργειας ταλάντωσης, τόση θα είναι και η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική, μέσω του έργου της δύναμης απόσβεσης. Αλλά την στιγμή t_1 η ενέργεια ταλάντωσης, λαμβάνοντας υπόψη ότι τη στιγμή αυτή το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας $x_1=0,5\text{m}-0,4\text{m}=0,1\text{m}$, είναι ίση:

$$E_1 = \frac{1}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} 50 \cdot 0,1^2 J + \frac{1}{2} 2 \cdot 1^2 J = 1,25 J$$

Αλλά τότε το έργο της δύναμης απόσβεσης είναι ίσο:

$$W_{F_{\alpha\pi}} = -|\Delta E| = -|1,25 J - 4 J| = -2,75 J$$

iii) Στα παρακάτω σχήματα έχουν σημειωθεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα την στιγμή t_1 . Βέβαια δεν μας έχει καθοριστεί η φορά της ταχύτητας, άρα έχουμε δυο περιπτώσεις. Το σώμα να κινείται προς τα κάτω, σχήμα (1) ή να κινείται προς τα πάνω, σχήμα (2).



Έχουμε δικαίωμα να ορίσουμε ως θετική, οποιαδήποτε κατεύθυνση επιθυμούμε. Παρακάτω επιλέγουμε ως θετική κατεύθυνση, την προς τα κάτω και για τις δύο περιπτώσεις, όπως έχει σημειωθεί στο σχήμα.

A) Για την περίπτωση του σχήματος (1), λαμβάνοντας υπόψη ότι η συνισταμένη της δύναμης του ελατηρίου και του βάρους, είναι η δύναμη επαναφοράς ($F=-Dx$), έχουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow a_1 &= \frac{F_{\alpha\pi} + (F_{\varepsilon\lambda} + w)}{m} = \frac{F_{\alpha\pi} + F_{\varepsilon\pi}}{m} = \frac{-bv_1 - kx_1}{m} \rightarrow \\ a_1 &= \frac{-0,2 \cdot 1 - 50 \cdot 0,1}{2} \text{ m/s}^2 = -2,6 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Ενώ για την περίπτωση του σχήματος (2), θα έχουμε:

$$a_2 = \frac{-bv_1 - kx_1}{m} = \frac{-0,2 \cdot (-1) - 50 \cdot 0,1}{2} \text{ m/s}^2 = -2,4 \text{ m/s}^2.$$

Δοκιμάστε να απαντήσετε, παίρνοντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική...

B) Χρησιμοποιώντας ξανά την δύναμη επαναφοράς $F=-kx$, στην θέση του βάρους και της δύναμης ελατηρίου θα έχουμε:

α) Η δυναμική ενέργεια (ταλάντωσης) συνδέεται με την συντηρητική δύναμη επαναφοράς με την σχέση:

$$W_{F_{\varepsilon\pi}} = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda} = -\Delta U \rightarrow$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{F_{\varepsilon\pi}}}{dt} = -P_{F_{\varepsilon\pi}} = -|F_{\varepsilon\pi}| \cdot |v| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = -k|x| \cdot |v| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

Οπότε αν το σώμα κινείται προς τα κάτω, σχήμα (1) έχουμε:

$$\frac{dU_1}{dt} = -k|x| \cdot |v| \cdot \sigma\upsilon\nu 180^\circ = 50 \cdot 0,1 \cdot 1 J/s = 5 J/s$$

Ενώ για την περίπτωση του σχήματος (2) θα έχουμε:

$$\frac{dU_2}{dt} = -k|x| \cdot |v| \cdot \sigma\upsilon\nu 0^\circ = -50 \cdot 0,1 \cdot 1 J/s = -5 J/s$$

b) Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος παίρνουμε:

$$K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{o\lambda}}{dt} = P_{F_{o\lambda}} = |F_{o\lambda}| \cdot |v| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = m|a| \cdot |v| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

Για την κίνηση του σώματος προς τα κάτω, παίρνουμε:

$$\frac{dK_1}{dt} = m|a| \cdot |v| \cdot \sigma\upsilon\nu 180^\circ = -2 \cdot 2,6 \cdot 1 J/s = -5,2 J/s$$

Ενώ για την κίνηση προς τα πάνω:

$$\frac{dK_2}{dt} = m|a| \cdot |v| \cdot \sigma\upsilon\nu 0^\circ = 2 \cdot 2,4 \cdot 1 J/s = +4,8 J/s$$

c) Αφού $E=K+U$, θα έχουμε:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt}$$

Έτσι για τις δύο περιπτώσεις κίνησης θα έχουμε:

$$\frac{dE_1}{dt} = \frac{dK_1}{dt} + \frac{dU_1}{dt} = -5,2 J/s + 5 J/s = -0,2 J/s$$

$$\frac{dE_2}{dt} = \frac{dK_2}{dt} + \frac{dU_2}{dt} = 4,8 J/s - 5 J/s = -0,2 J/s$$

Σχόλιο:

Η απώλεια της ενέργειας ταλάντωσης συνδέεται με το έργο της δύναμης απόσβεσης. Αλλά τότε θα μπορούσαμε να γράψουμε:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dW_{F_{\alpha\pi}}}{dt} = P_{F_{\alpha\pi}} = |F_{\alpha\pi}| \cdot |v| \cdot \sigma\upsilon\nu 180^\circ = -bv^2$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας ταλάντωσης, δεν εξαρτάται από την φορά κίνησης του σώματος, αφού και στις δύο περιπτώσεις η δύναμη απόσβεσης είναι αντίθετη της ταχύτητας και η ισχύς της είναι η ίδια.