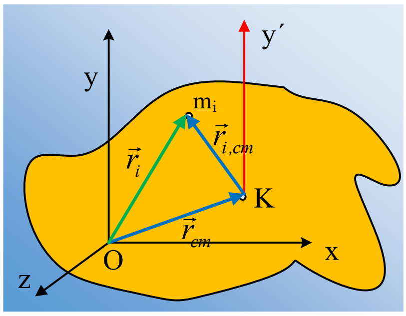
Τα θεωρήματα παραλλήλων και καθέτων αξόνων

1) Ας ξεκινήσουμε από το «εντός ύλης» θεώρημα των παραλλήλων αξόνων (θεώρημα Steiner).

Έστω ένα επίπεδο στερεό, τυχαίου σχήματος και Κ το κέντρο μάζας του. Έστω επίσης ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων x,y,z, με αρχή το σημείο Ο, όπου μας ενδιαφέρει η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα y. Χωρίζουμε το στερεό σε στοιχειώδεις μάζες m_i και έστω μια από αυτές στο σχήμα με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_i$ όπου, με βάση το σχήμα ισχύει:



$$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_{i,cm}$$

Έτσι η ροπή αδράνειας του στερεού μας ως προς τον άξονα y είναι ίση:

$$I_y = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i \cdot \left(\vec{r}_{cm} + \vec{r}_{i,cm}\right)^2 = \sum m_i \cdot \left(r_{cm}^2 + r_{i,cm}^2 + 2\vec{r}_{cm} \cdot \vec{r}_{i,cm}\right) \rightarrow$$
$$I_y = \sum m_i \cdot r_{cm}^2 + \sum m_i \cdot r_{i,cm}^2 + 2\vec{r}_{cm} \cdot \sum m_i \cdot \vec{r}_{i,cm}$$

Αλλά από την σχέση εύρεσης του κέντρου μάζας του στερεού, με βάση τις θέσεις $\vec{r}_{i,cm}$ των στοιχειωδών μαζών ισχύει:

$$r'_{cm} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_{i,cm}}{\sum m_i} = 0$$

Ενώ λαμβάνοντας υπόψη ότι:

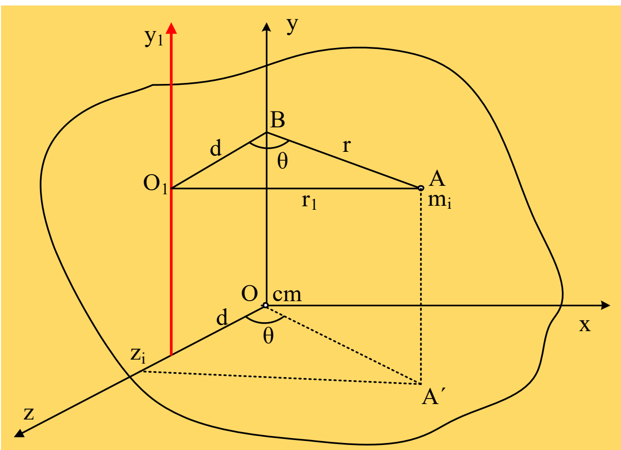
$$\sum m_i \cdot r_{i,cm}^2 = I_{cm.y} \qquad \text{και} \sum m_i \cdot r_{cm}^2 = r_{cm}^2 \cdot \sum m_i = r_{cm}^2 \cdot M = M \cdot d^2$$

Παίρνουμε:

$$I_y = I_{cm.y} + M \cdot d^2$$

Και αν το στερεό μας δεν είναι επίπεδο;

Στο σχήμα βλέπουμε ένα στερεό και ένα σύστημα αξόνων xyz με αρχή το κέντρο μάζας Ο του στερεού. Έστω ένας άξονας y_1 παράλληλος στον άξονα y σε απόσταση d από αυτόν. Στο σημείο Α παίρνουμε μια στοιχειώδη μάζα m_i η οποία απέχει απόσταση r από τον άξονα y (η ΑΒ κάθετη στον άξονα y) και απόσταση $(AO_1)=r_1$ από τον άξονα y_1, όπου το τρίγωνο



O_1AB είναι παράλληλο στο επίπεδο xOz. Για τη στοιχειώδη ροπή αδράνειας της μάζας αυτής ως προς τον άξονα y_1 έχουμε:

$$\delta I_{1,i} = m_i (O_1 A)^2 = m_i r_1^2$$

Αλλά από το τρίγωνο O_1BA παίρνουμε:

$$r_1^2 = r^2 + d^2 - 2dr \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

Οπότε για την ολική ροπή αδράνειας του στερεού μας ως προς τον άξονα y_1 παίρνουμε:

$$I_{y1} = \sum_1^{\nu} m_1 r_{1i}^2 = \sum_1^{\nu} m_1 (r_i^2 + d^2 - 2d \cdot r_i \cdot \sigma\upsilon\nu\theta) = \sum_1^{\nu} m_1 r_i^2 + \sum_1^{\nu} m_1 d^2 - 2d \cdot \sum_1^{\nu} m_1 r_i \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow$$

$$I_{y1} = \sum_1^{\nu} m_1 r_i^2 + \sum_1^{\nu} m_1 d^2 - 2d \cdot \sum_1^{\nu} m_1 \cdot z_i$$

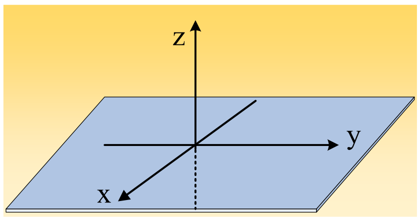
Αλλά

$$\sum_1^{\nu} m_1 r_i^2 = I_{y,cm}, \quad \sum_1^{\nu} m_1 d^2 = d^2 \sum_1^{\nu} m_1 = Md^2$$

ενώ από τον ορισμό του κέντρου μάζας $\sum_1^{\nu} m_1 \cdot z_i = 0$, οπότε τελικά:

$$I_{y1} = I_{y,cm} + Md^2$$

2) Πέρα από το παραπάνω «γνωστό» μας θεώρημα των παραλλήλων αξόνων (θεώρημα Steiner), έχουμε και το θεώρημα καθέτων αξόνων που αναφέρεται σε λεπτές επίπεδες πλάκες:



> «Η ροπή αδράνειας μιας λεπτής επίπεδης πλάκας ως προς άξονα κάθετο σε αυτήν, είναι ίση με το άθροισμα των ροπών αδράνειας ως προς δύο οποιουσδήποτε άξονες κάθετους μεταξύ τους άξονες, που βρίσκονται στο επίπεδο της πλάκας και τέμνουν τον κάθετο άξονα»

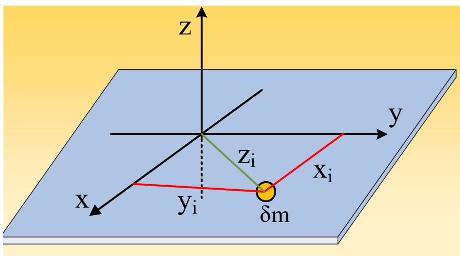
Έτσι αναφερόμενοι στην πλάκα του παραπάνω σχήματος ισχύει:

$$I_z = I_x + I_y$$

Όπου οι άξονες x και y είναι πάνω στο επίπεδο και ο άξονας z είναι κάθετος στην πλάκα.

Απόδειξη:

Έστω ότι αναφερόμαστε σε μια λεπτή πλάκα, όπως η παραπάνω και μια στοιχειώδης σημειακή μάζα δm με συντεταγμένες x_i, y_i, όπως στο διπλανό σχήμα. Τότε η στοιχειώδης ροπή αδράνειας της μάζας αυτής ως προς κάθε άξονα έχει τιμή:



$$\delta I_x = \delta m_i \cdot y_i^2 \;, \quad \delta I_y = \delta m_i \cdot x_i^2 \;, \quad \delta I_z = \delta m_i \cdot z_i^2$$

Όμως από το Π.Θ. προκύπτει ότι

$$z_i^2 = x_i^2 + y_i^2$$

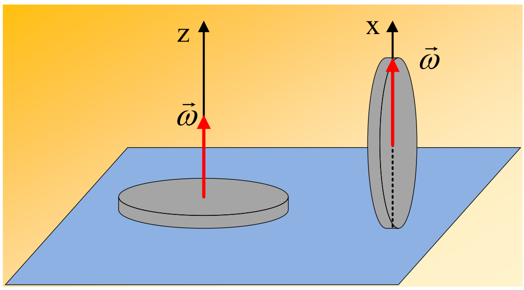
Οπότε αν χωρίσουμε την πλάκα σε στοιχειώδεις μάζας δm_i και προσθέσουμε, θα πάρουμε:

$$I_z = \sum \delta m_i \cdot z_i^2 = \sum \delta m_i \cdot \left(x_i^2 + y_i^2\right) = \sum \delta m_i \cdot x_i^2 + \sum \delta m_i \cdot y_i^2 \rightarrow$$

$$I_z = I_x + I_y$$

Εφαρμογή 1η:

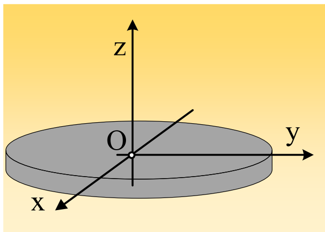
Ένα νόμισμα μπορεί να στρέφεται γύρω από κάθετο άξονα z, ο οποίος περνάει από το κέντρο του, με γωνιακή ταχύτητα ω, έχοντας κινητική ενέργεια K_1. Αν το ίδιο νόμισμα τεθεί σε περιστροφή γύρω, όπως στο 2ο σχήμα (όρθιο σε λείο οριζόντιο επίπεδο) γύρω από τον άξονα x, με την ίδια γωνιακή ταχύτητα, έχει κινητική ενέργεια K_2. Να υπολογιστεί ο λόγος K_1/K_2.



Δίνεται η ροπή αδράνειας του νομίσματος ως προς τον κάθετο άξονα $I_z = ½\, mR^2$.

Απάντηση:

Έστω ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων x, y, z, όπου οι άξονες x και y είναι πάνω στο επίπεδο του νομίσματος και ο z άξονας κάθετος στο επίπεδο, με αρχή το κέντρο O του νομίσματος. Για τις ροπές αδράνειας του νομίσματος ως προς τους άξονες x και y, ισχύει $I_x = I_y$ λόγω συμμετρίας. Αλλά τότε:



$$I_z = I_x + I_y \rightarrow\ I_z = 2I_x \rightarrow$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} mR^2 = \frac{1}{4} mR^2$$

Οπότε για τις κινητικές ενέργειες γύρω από του άξονες z και x (βλέπε σχήμα), θα έχουμε:

$$K_1 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} mR^2\omega^2 = \frac{1}{4} mR^2\omega^2 \text{ και}$$

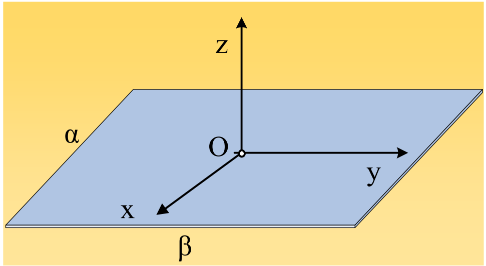
$$K_2 = \frac{1}{2} I_x \omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} mR^2\omega^2 = \frac{1}{8} mR^2\omega^2$$

Με λόγο:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{4} mR^2\omega^2}{\frac{1}{8} mR^2\omega^2} = 2$$

Εφαρμογή 2η:

Να υπολογιστεί ο παραπάνω λόγος K_1/K_2 αν αντί για περιστροφή νομίσματος είχαμε περιστροφή ενός ομογενούς λεπτού τετραγώνου, γύρω από τον κάθετο άξονα z, ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας του O και τον άξονα x παράλληλο στο επίπεδο, όπως στο σχήμα, αν δίνεται η ροπή αδράνειας ως προς τον κάθετο άξονα ενός ορθογωνίου που περνά από το κέντρο μάζας του:



$$I_z = \frac{1}{12}m(a^2+\beta^2)$$

Απάντηση:

Λόγω συμμετρίας $I_x=I_y$, αφού α=β, οπότε από το θεώρημα των καθέτων αξόνων έχουμε:

$$I_z = I_x + I_y \rightarrow I_z = 2I_x \rightarrow$$

$$\frac{1}{12}m(a^2+\beta^2) = 2I_x \rightarrow \frac{1}{12}m\cdot 2a^2 = 2I_x \rightarrow$$

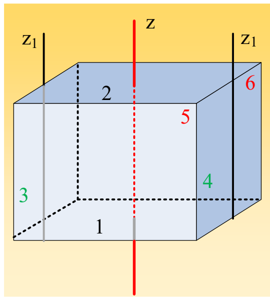
$$I_x = I_y = \frac{1}{12}m\cdot a^2$$

Αλλά τότε ο λόγος των κινητικών ενεργειών είναι ίσος:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{K_z}{K_x} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}m\cdot 2a^2\cdot\omega^2}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}m\cdot a^2\cdot\omega^2} = 2$$

Εφαρμογή 3η:

Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας ενός κυβικού (κενού) χαρτοκιβωτίου μάζας M και πλευράς α, ως προς άξονα z ο οποίος περνά από τα κέντρα δύο απέναντι εδρών του, όπως στο σχήμα.



Δίνεται η ροπή αδράνειας ενός ορθογωνίου, ως προς τον κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του:

$$I_z = \frac{1}{12}m(a^2+\beta^2)$$

Απάντηση:

Κάθε έδρα του κύβου έχει μάζα m= 1/6 M ενώ μπορούμε να βρούμε τη ροπή αδράνειας του κύβου, ως το άθροισμα των ροπών αδράνειας των 6 εδρών, που έχουν σημειωθεί στο σχήμα. Για τις δυο βάσεις 1 και 2, όπου ο άξονας είναι κάθετος και περνά από τα κέντρα των βάσεων, θα έχουμε:

$$I_{1,z} = I_{2,z} = \frac{1}{12}m(a^2+\beta^2) = \frac{1}{12}m\cdot 2\alpha^2 = \frac{1}{6}m\cdot\alpha^2$$

Οι τέσσερεις παράπλευρες έδρες είναι ισοδύναμες, οπότε ας ασχοληθούμε με την έδρα 3.

από το θεώρημα των καθέτων αξόνων έχουμε:

$$I_{\kappa} = I_x + I_y \rightarrow I_{\kappa} = 2I_{\pi\alpha\rho} \rightarrow$$

$$\frac{1}{12}m(a^2+\beta^2) = 2I_{\pi\alpha\rho} \rightarrow \frac{1}{12}m \cdot 2a^2 = 2I_x \rightarrow$$

$$I_{\pi\alpha\rho} = I_{z,1} = \frac{1}{12}m \cdot a^2$$

Ενώ από το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων παίρνουμε:

$$I_{3,z} = I_{3,\pi\alpha\rho} + m \cdot d^2 = \frac{1}{12}m \cdot a^2 + m \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{1}{3}m \cdot a^2$$

Οπότε η συνολική ροπή αδράνειας του κύβου είναι ίση:

$$I_z = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 = 2I_z + 4I_3 \rightarrow$$

$$I_z = 2 \cdot \frac{1}{6}m \cdot \alpha^2 + 4 \cdot \frac{1}{3}m \cdot \alpha^2 = \frac{5}{3}m \cdot \alpha^2 \rightarrow$$

$$I_z = \frac{5}{3} \cdot \frac{M}{6} \cdot \alpha^2 = \frac{5}{18}M \cdot \alpha^2$$

dmargaris@gmail.com