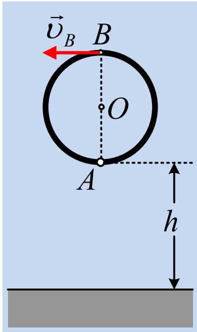
Μια στρεφόμενη στεφάνη.



Μια στεφάνη μάζας M=0,8kg και ακτίνας R=0,5m στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος περνά από το άκρο A μιας διαμέτρου της AB και ο οποίος βρίσκεται σε ύψος h=1,35 από το έδαφος, χωρίς τριβές. Σε μια στιγμή η διάμετρος AB είναι κατακόρυφη και το άκρο B έχει ταχύτητα υ_B=4m/s.

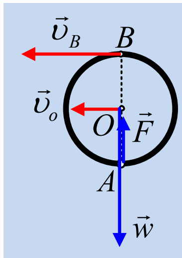
i) Να βρεθεί η κατεύθυνση της δύναμης, που ασκεί ο άξονας στη στεφάνη στη θέση αυτή και στη συνέχεια να υπολογιστεί το μέτρο της.

ii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σημείου B, στη θέση που η διάμετρος AB γίνεται οριζόντια για πρώτη φορά.

iii) Στην παραπάνω θέση, η στεφάνη απελευθερώνεται από τον άξονα και πέφτει στο έδαφος. Να βρεθεί η ταχύτητα του κέντρου O της στεφάνης τη στιγμή της πρόσκρουσης.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:



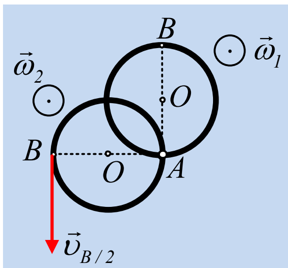
i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιασθεί οι δυνάμεις που ασκούνται στην στεφάνη τη στιγμή που η διάμετρος AB είναι κατακόρυφη, όπου **F** η δύναμη από τον άξονα.

Στη θέση αυτή ως προς τον άξονα περιστροφής στο A, δεν υπάρχουν ροπές, συνεπώς η γωνιακή επιτάχυνση της στεφάνης είναι μηδενική. Αλλά τότε και το κέντρο μάζας, το κέντρο της στεφάνης O, δεν έχει επιτρόχια επιτάχυνση, συνεπώς δεν ασκείται και οριζόντια συνιστώσα δύναμης στην τροχαλία, άρα η δύναμη F από τον άξονα είναι κατακόρυφη.

Στη θέση αυτή $\upsilon_B=\omega\cdot 2R=2\omega R=2\upsilon_o=2\upsilon_{cm}$ και εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα για την κίνηση του κέντρου μάζας παίρνουμε:

$$\Sigma F = M\frac{\upsilon_{cm}^2}{R} \rightarrow w - F = M\frac{\upsilon_B^2}{4R} \rightarrow$$

$$F = Mg - M\frac{\upsilon_B^2}{4R} = 0{,}8\cdot 10N - 0{,}8\cdot\frac{4^2}{2}N = 1{,}6N$$



ii) Έστω ω_1 η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της στεφάνης στην κατακόρυφη θέση και ω_2 στην οριζόντια θέση (της διαμέτρου AB). Η ροπή αδράνειας της στεφάνης ως προς τον άξονα περιστροφής στο A, θα υπολογιστεί με εφαρμογή του θεωρήματος Steiner:

$$I_A=I_{cm}+MR^2=MR^2+MR^2=2\cdot MR^2.$$

Όπου κάθε στοιχειώδης μάζα της στεφάνης θεωρείται ότι απέχει κατά R από το κέντρο O, οπότε και $I_{cm}=\Sigma m_i R^2=MR^2$.

Ορίζουμε τώρα επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το A, οπότε εφαρμόζοντας τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, θα έχουμε:

$$K_1+U_1=K_2+U_2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I\omega_1^2+MgR=\frac{1}{2}I\omega_2^2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}2MR^2\cdot\omega_1^2+MgR=\frac{1}{2}2MR^2\cdot\omega_2^2 \rightarrow$$

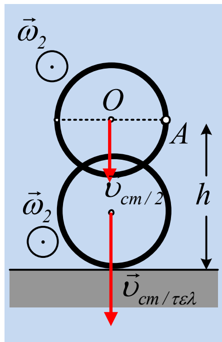
$$\omega_2=\sqrt{\omega_1^2+\frac{g}{R}}=\sqrt{\left(\frac{\upsilon_B}{2R}\right)^2+\frac{g}{R}}=\sqrt{\left(\frac{4}{2\cdot 0{,}5}\right)^2+\frac{10}{0{,}5}}rad/s=6rad/s$$

Αλλά τότε το σημείο Β έχει ταχύτητα:

$$\upsilon_{B/2}=\omega_2\cdot 2R=6m/s.$$

κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω.

iii) Θεωρούμε τώρα επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, το έδαφος και εφαρμόζουμε ξανά τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για την κίνηση της στεφάνης, από τη θέση που απελευθερώνεται μέχρι τη στιγμή που αγγίζει το έδαφος:



$$K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}M\upsilon_{cm/2}^2+\frac{1}{2}I\omega_2^2+Mgh=\frac{1}{2}M\upsilon_{cm/\tau\varepsilon\lambda}^2+\frac{1}{2}I\omega_2^2+MgR$$

Όπου η αρχική ταχύτητα του κέντρου μάζας ήταν $\upsilon_{cm/2}=\omega_2\cdot R=3m/s$, ενώ κατά την πτώση της στεφάνης, η γωνιακή της ταχύτητα παραμένει σταθερή, αφού δεν ασκείται πάνω της κάποια ροπή που να την μεταβάλλει.

Αλλά τότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\frac{1}{2}M\upsilon_{cm/2}^2+Mgh=\frac{1}{2}M\upsilon_{cm/\tau\varepsilon\lambda}^2+MgR\rightarrow$$

$$\upsilon_{cm/\tau\varepsilon\lambda}=\sqrt{\upsilon_{cm/2}^2+2g(h-R)}=\sqrt{3^2+2\cdot 10\cdot(1{,}3-0{,}5)}m/s=5m/s$$

Σχόλιο:

Προφανώς η αποδέσμευση της στεφάνης από τον άξονα περιστροφής της δεν συνεπάγεται κάποια ενεργειακή μετατροπή. Έτσι η κινητική ενέργεια μετά την αποδέσμευση είναι ίση με την κινητική ενέργεια πριν. Πράγματι πριν, όταν θεωρούσαμε ότι η στεφάνη εκτελεί μόνο στροφική κίνηση, είχε κινητική ενέργεια:

$$K=\frac{1}{2}I_A\omega_2^2=\frac{1}{2}(I_{cm}+Md^2)\omega_2^2=\frac{1}{2}I_{cm}\omega_2^2+\frac{1}{2}MR^2\omega_2^2=\frac{1}{2}I_{cm}\omega_2^2+\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2$$

Ίση δηλαδή, με την κινητική ενέργεια που αποδώσαμε στη στεφάνη, αμέσως μετά την αποδέσμευση, όπου και θεωρήσαμε ότι η στεφάνη εκτελεί σύνθετη κίνηση.

Περίεργο; Καθόλου. Ενώ αρχικά θεωρούσαμε ότι η κίνηση είναι απλή (μόνο στροφική), κάποιος άλλος θα μπορούσε να την μελετήσει ως σύνθετη. Μια μεταφορική, όπου το στερεό αντιμετωπίζεται σαν υλικό σημείο με την μάζα του συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας και μια στροφική γύρω από το κέντρο μάζας, με την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

dmargaris@sch.gr