

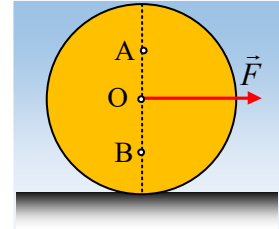
## Μερικές ερωτήσεις στη δυναμική στερεού.

Στις παρακάτω ερωτήσεις ένας ομογενής δίσκος μπορεί να κινείται σε οριζόντιο **μη λείο** επίπεδο.

### Ερώτηση 1<sup>η</sup>:

Ο δίσκος αρχικά ηρεμεί και κάποια στιγμή δέχεται στο κέντρο του οριζόντια δύναμη  $F$ , με αποτέλεσμα να αρχίσει να κυλιέται.

- i) Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στον δίσκο είναι ή όχι οριζόντια;
- ii) Ο φορέας της συνισταμένης δύναμης στον δίσκο, περνά από το σημείο:
  - α) το κέντρο  $O$  του δίσκου,    β)  $A$ ,    γ) το  $B$ .



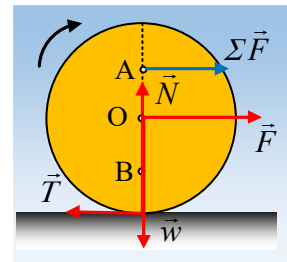
όπου τα σημεία  $A$  και  $B$  είναι σημεία μιας κατακόρυφης διαμέτρου, όπως στο σχήμα.

### Απάντηση:

Αφού ο δίσκος κυλιέται, σημαίνει ότι αποκτά επιτάχυνση κέντρου μάζας  $O$ , με φορά προς τα δεξιά, ενώ στρέφεται αποκτώντας και δεξιόστροφη γωνιακή επιτάχυνση, η οποία οφείλεται στη ροπή της τριβής.

Θεωρώντας την κίνηση σύνθετη, έχουμε από τον 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_{cm} \quad (1) \quad \Sigma \tau_o = I_{cm}\vec{a}_{γων} \quad (2)$$



- i) Με βάση την εξίσωση (1) αφού ο τροχός κυλιέται η επιτάχυνση του κέντρου  $O$  είναι παράλληλη στο επίπεδο, άρα οριζόντια, οπότε και η συνισταμένη δύναμη είναι οριζόντια.
- ii) Με βάση την εξίσωση (2), αφού η γωνιακή επιτάχυνση είναι δεξιόστροφη, δεξιόστροφη πρέπει να είναι και η συνολική ροπή ως προς το κέντρο μάζας  $O$ . Αλλά τότε η συνισταμένη δύναμη θα περνά από το σημείο  $A$ , πάνω από το κέντρο  $O$ , όπως στο σχήμα. Σωστό το β).

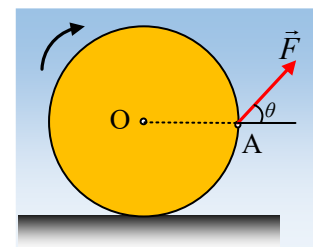
### Ερώτηση 2<sup>η</sup>:

Ο δίσκος κυλιέται με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας  $O$ , με την επίδραση δύναμης  $F$ , στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας  $A$ . Για την γωνία  $\theta$  που σχηματίζει η δύναμη με την οριζόντια διεύθυνση ισχύει:

$$\alpha) \theta < 45^\circ, \quad \beta) \theta = 45^\circ, \quad \gamma) \theta > 45^\circ.$$

### Απάντηση:

Αφού η ταχύτητα κέντρου μάζας παραμένει σταθερή, η επιτάχυνση του κέντρου μάζας είναι μηδενική, συνεπώς και η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου είναι μηδενική, αφού  $a_{cm} = a_{γων}R$ . Αλλά τότε, δεχόμενοι ότι η κίνηση είναι σύνθετη και αναλύοντας την δύναμη  $F$  σε συνιστώσες, όπως στο παρακάτω σχήμα, παίρνουμε από το 2<sup>ο</sup>

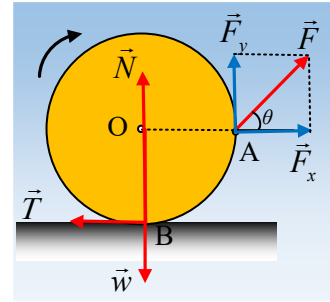


νόμο του Νεύτωνα:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_{cm} = 0 \rightarrow F_x = T \quad (1^a)$$

$$\Sigma \tau_o = I_{cm}\vec{a}_{γων} = 0 \rightarrow F_y \cdot R - T_y \cdot R = 0 \rightarrow F_y = T$$

Όποτε λόγω της (1<sup>α</sup>), παίρνουμε  $F_x = F_y$  συνεπώς το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο και  $\theta = 45^\circ$ . Σωστό το β).

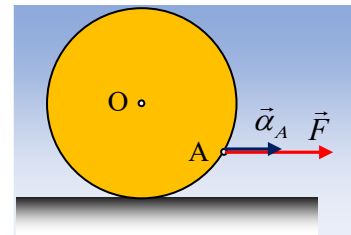


**Σχόλιο:**

Το σημείο επαφής του δίσκου με το επίπεδο (σημείο Β), έχει μηδενική ταχύτητα και μπορούμε να πάρουμε την περιστροφή του δίσκου ως προς οριζόντιο άξονα που περνά από το Β. Αλλά αφού έχουμε σταθερή ταχύτητα κύλισης έχουμε και σταθερή γωνιακή ταχύτητα, οπότε  $\Sigma \tau_B = 0$ . Αλλά αφού βάρος, κάθετη αντίδραση Ν και τριβή, περνούν από το Β και η ασκούμενη δύναμη F, περνά από το Β, οπότε  $\theta = 45^\circ$ .

**Ερώτηση 3<sup>η</sup>:**

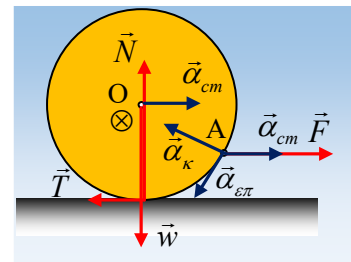
Ο παραπάνω δίσκος δέχεται την επίδραση μιας οριζόντιας δύναμης F, στο σημείο Α, όπως στο σχήμα, με αποτέλεσμα το σημείο Α να αποκτά επιτάχυνση  $a_A$  της ίδιας κατεύθυνσης και ίση με την επιτάχυνση του κέντρου Ο.



- i) Η κίνηση του δίσκου είναι ή όχι μεταφορική;
- ii) Ο φορέας της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται στον δίσκο περνά ή όχι από το Ο;

**Απάντηση:**

- i) Δουλεύοντας όπως προηγουμένως, υποθέτοντας δηλαδή ότι ο δίσκος εκτελεί σύνθετη κίνηση, θα έχουμε ότι λόγω μεταφοράς το κέντρο Ο, θα αποκτήσει επιτάχυνση  $a_{cm}$ , ενώ το σημείο Α εκτός της επιτάχυνσης αυτής, θα αποκτήσει και επιτάχυνση εφαπτόμενη στον δίσκο  $a_{επ} = a_{γων} \cdot R$ , καθώς και κεντρομόλο επιτάχυνση, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε η επιτάχυνση του Α δεν μπορεί να είναι ίση με την  $a_{cm}$ , αφού το διανυσματικό άθροισμα:



$$\vec{a}_κ + \vec{a}_{επ} \neq 0$$

Συνεπώς η κίνηση δεν μπορεί παρά να είναι μόνο μεταφορική.

- ii) Για να είναι μεταφορική η κίνηση του δίσκου, σημαίνει ότι η συνολική ροπή των δυνάμεων (ισοδύναμα η ροπή της συνισταμένης δύναμης), ως προς το κέντρο μάζας Ο, θα είναι μηδενική, αφού δεν αποκτά γωνιακή επιτάχυνση. Ισχύει δηλαδή:

$$\Sigma \tau_o = I_{cm}\vec{a}_{γων} = 0$$

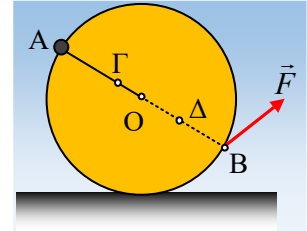
Πράγμα που σημαίνει ότι ο φορέας της συνισταμένης διέρχεται από το κέντρο Ο.

Ισοδύναμα, με βάση τη θεωρία μας: Αν σ' ένα ελεύθερο σώμα ασκηθεί δύναμη που ο φορέας της διέρχεται

από το κέντρο μάζας του, το σώμα δεν περιστρέφεται (θα εκτελέσει μεταφορική κίνηση).

### Ερώτηση 4<sup>η</sup>:

Σε ένα σημείο A, στην περιφέρεια του δίσκου προσκολλάται μια σημειακή μάζα m, δημιουργώντας το στερεό s. Στο αντιδιαμετρικό σημείο του A, σημείο B, ασκούμε μια σταθερή δύναμη F όπως στο σχήμα. Το αποτέλεσμα είναι το στερεό μας s να εκτελεί μόνο επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση.



- i) Η συνισταμένη δύναμη στο στερεό s είναι ή όχι οριζόντια;
- ii) Ο φορέας τη συνισταμένης περνά:
  - α) Από το κέντρο O του δίσκου.
  - β) Από το σημείο Γ μεταξύ A και O.
  - γ) Από το σημείο Δ μεταξύ O και B.

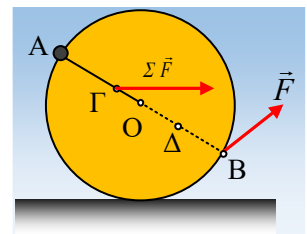
### Απάντηση:

- i) Αφού το στερεό s κινείται οριζόντια και η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του, θα είναι οριζόντια, οπότε σύμφωνα με το 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα:

$$\Sigma \vec{F} = M_{ολ} \vec{\alpha}_{cm}$$

Και η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο στερεό θα είναι οριζόντια.

- ii) Αφού η κίνηση του στερεού είναι μεταφορική, η συνολική ροπή των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του, **ως προς το κέντρο μάζας του**, θα είναι μηδενική. Αλλά το κέντρο μάζας του στερεού s, δεν είναι το κέντρο O του δίσκου, αλλά κάποιο σημείο μεταξύ του O και του σημείου A, όπου έχει προσδεθεί η σημειακή μάζα m, οπότε η συνισταμένη δύναμη θα έχει την κατεύθυνση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, διερχόμενη από ένα σημείο όπως το Γ.



[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)