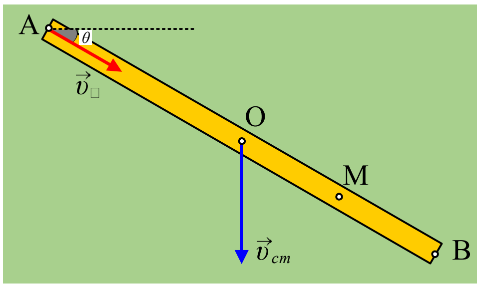
Η ράβδος πέφτει κατακόρυφα

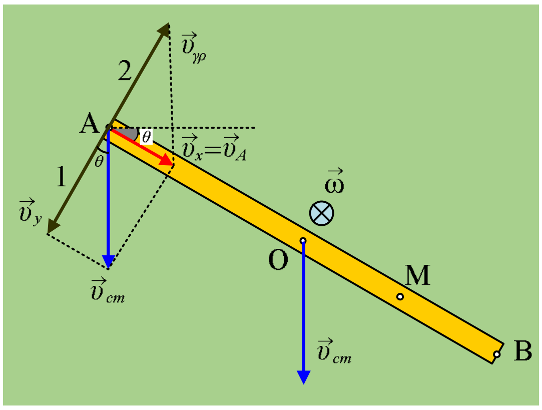


Μια λεπτή ομογενής ράβδος ΑΒ, μήκους 4m, πέφτει κατακόρυφα και σε μια στιγμή σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ (ημθ=0,6), ενώ το άκρο της Α έχει ταχύτητα όπως στο σχήμα, με κατεύθυνση προς το άκρο Β και μέτρου υ_A=3m/s.

i) Να βρεθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας Ο της ράβδου καθώς και η γωνιακή της ταχύτητα.

ii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του μέσου Μ της ΟΒ.

Απάντηση:



i) Θεωρούμε την κίνηση της ράβδου σύνθετη, μια μεταφορική με ταχύτητα υ_{cm} και μια περιστροφική γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας Ο. Τότε το άκρο Α έχει την ταχύτητα υ_{cm} και μια γραμμική ταχύτητα κάθετη στην ΑΒ, είτε όπως το διάνυσμα 1, είτε το διάνυσμα 2. Αλλά για την ταχύτητα του σημείου Α ισχύει:

$$\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$$

Δηλαδή το διανυσματικό άθροισμα της $\vec{\upsilon}_{cm}$ και της $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$ θα δώσει ταχύτητα κατά μήκος της ΑΒ. Για να συμβεί αυτό δεν μπορεί η γραμμική ταχύτητα να είναι το διάνυσμα 1. Αντίθετα στο σχήμα έχουμε σχεδιάσει το παραλληλόγραμμο όπου η διαγώνιός του είναι ίση με την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_A$ κατά μήκος της ράβδου. Αλλά τότε η ράβδος στρέφεται ωρολογιακά με γωνιακή ταχύτητα, όπως στο σχήμα.

Αναλύουμε την ταχύτητα υ_{cm} σε δυο συνιστώσες υ_x κατά μήκος της ράβδου και υ_y σε κάθετη διεύθυνση, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε η ταχύτητα του σημείου Α, η υ_A προκύπτει από την σύνθεση των $\upsilon_{\gamma\rho}$, υ_x και υ_y. Από το σχήμα βλέπουμε ότι αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο αν υ_y=υγρ και $\upsilon_A=\upsilon_x$. οπότε έχουμε:

$$\upsilon_x=\upsilon_A=\upsilon_{cm}\cdot\eta\mu\theta \to \upsilon_{cm} = \frac{\upsilon_A}{\eta\mu\theta} = \frac{3}{0,6} m/s = 5m/s$$

Αλλά τότε στην κάθετη διεύθυνση θα ισχύει:

$$\upsilon_y=\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot ½\, \ell \to \upsilon_{cm}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = \omega\cdot ½\, \ell \to$$

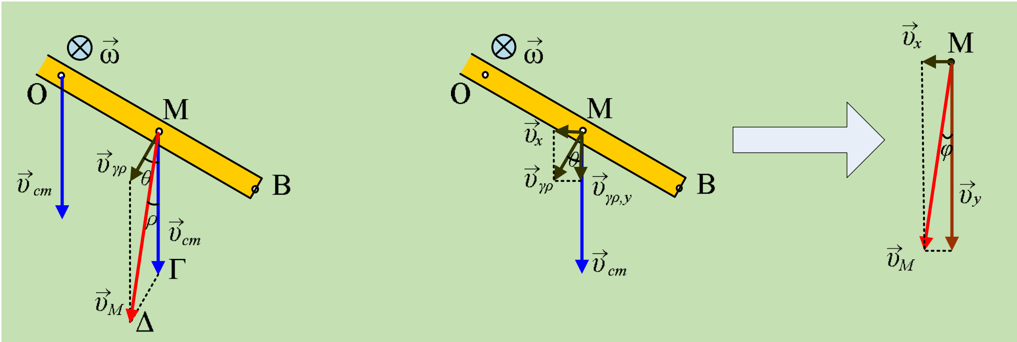
$$\omega = \frac{2\upsilon_{cm}\sigma\upsilon\nu\theta}{\ell} = \frac{2\cdot 5\cdot 0,8}{4} rad/s = 2rad/s$$

Με διεύθυνση οριζόντια, κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς, με φορά προς τα μέσα, στο μέσον Ο της ράβδου, όπως στο σχήμα.

ii) Το σημείο Μ έχει λόγω μεταφορικής κίνησης την ταχύτητα υ_{cm} και λόγω περιστροφής την ταχύτητα $\upsilon_{\gamma\rho}$, όπως στο σχήμα, όπου η γωνία μεταξύ τους είναι θ. Η γραμμική ταχύτητα έχει μέτρο:

$$\upsilon_{\gamma\rho,M}=\omega\cdot r=\omega\cdot(OM)=2\cdot 1\ m/s$$

Για την εύρεση της συνολικής ταχύτητας του σημείου Μ μπορούμε να δουλέψουμε με δυο τρόπους:



1ος τρόπος:

Με την μέθοδο του παραλληλογράμμου (πρώτο σχήμα) παίρνουμε:

$$\upsilon_M = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho}^2 + 2\upsilon_{cm}\upsilon_{\gamma\rho}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta} \rightarrow$$

$$\upsilon_M = \sqrt{5^2 + 2^2 + 2\cdot 5\cdot 2\cdot 0{,}8}m/s = 3\sqrt{5}m/s$$

Ενώ από τον νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ΜΓΔ παίρνουμε για τη γωνία ρ που σχηματίζει η ταχύτητα με την κατακόρυφο:

$$\frac{(\Gamma\Delta)}{\eta\mu\rho} = \frac{(M\Delta)}{\eta\mu(\pi-\theta)} \rightarrow$$

$$\eta\mu\rho = \frac{(\Gamma\Delta)}{(M\Delta)}\,\eta\mu\theta = \frac{2}{3\sqrt{5}}\cdot 0{,}6 \approx 0{,}18$$

2ος τρόπος:

Αναλύουμε την γραμμική ταχύτητα σε δύο συνιστώσες μια οριζόντια και μια κατακόρυφη, όπως στο δεύτερο σχήμα, οπότε:

$$\upsilon_x=\upsilon_{\gamma\rho}\cdot\eta\mu\theta = 2\cdot 0{,}6 m/s = 1{,}2\ m/s$$

$$\upsilon_{\gamma\rho,y}= \upsilon_{\gamma\rho}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = 2\cdot 0{,}8\ m/s = 1{,}6\ m/s$$

Οπότε: $\upsilon_y=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho,y}=5m/s+1{,}6m/s= 6{,}6\ m/s$

Τότε με βάση το 3ο σχήμα, για το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Μ, από το Π.Θ. έχουμε:

$$\upsilon_M = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{1{,}2^2 + 6{,}6^2}\,m/s = \sqrt{45}m/s = 3\sqrt{5}m/s$$

Ενώ η κατεύθυνσή της σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία φ, όπου:

$$\eta\mu\varphi = \frac{\upsilon_x}{\upsilon_M} = \frac{1{,}2}{3\sqrt{5}} \approx 0{,}18$$

Προφανώς φ=ρ!

dmargaris@gmail.com