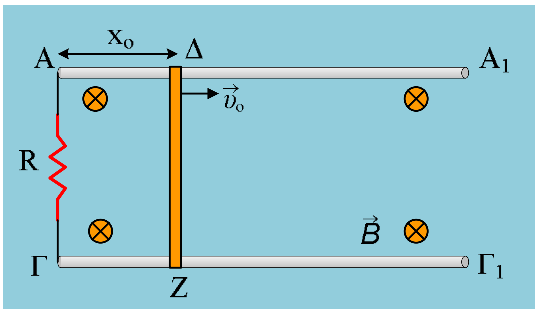
Η επιβράδυνση του αγωγού στο μαγνητικό πεδίο



Ο αγωγός ΔΖ μάζας m=0,5kg και μήκους ℓ=1m, κινείται οριζόντια σε επαφή με δυο παράλληλους αγωγούς AA_1 και $ΓΓ_1$ μήκους d=5m, χωρίς τριβές, μέσα σε ένα ομογενές κατακόρυφο μαγνητικό πεδίο έντασης B=0,5T, το οποίο εκτείνεται στην περιοχή που ορίζεται από τους αγωγούς AA_1 και $ΓΓ_1$. Ο αγωγός ΔΖ και οι δύο αγωγοί AA_1 και $ΓΓ_1$ δεν παρουσιάζουν αντίσταση, ενώ μεταξύ των άκρων Α και Γ συνδέεται αντιστάτης με αντίσταση R=0,5Ω. Σε μια στιγμή $t_0=0$, ο αγωγός ΔΖ απέχει κατά $x_o=0,5m$ από τα άκρα ΑΓ και έχει ταχύτητα $\upsilon_o=4m/s$ παράλληλη προς τον αγωγό AA_1 με φορά προς τα δεξιά. Η ταχύτητα αυτή είναι επίσης κάθετη στον αγωγό ΔΖ. Με την επίδραση κατάλληλης οριζόντιας δύναμης F, κάθετης προς τον ΔΖ, επιτυγχάνουμε ο αγωγός να επιβραδύνεται, έχοντας σταθερή επιτάχυνση, με φορά αντίθετη της ταχύτητας και μέτρο $α=2m/s^2$, μέχρι τη θέση που μηδενίζεται η ταχύτητά του, όπου και σταματά να ασκείται πάνω του και η δύναμη F.

i) Να υπολογιστεί η μέγιστη τιμή της μαγνητικής ροής που διέρχεται από το ορθογώνιο ΑΔΖΓ, θεωρώντας την κάθετη στην επιφάνεια να έχει την ίδια φορά με την ένταση του πεδίου.

ii) Να βρεθεί η συνάρτηση της μαγνητικής ροής που περνά από το παραπάνω ορθογώνιο, σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.

iii) Να βρεθεί η εξίσωση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΔΖ, σε συνάρτηση με το χρόνο και να υπολογιστεί ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα στον αντιστάτη τις χρονικές στιγμές:

α) $t_1=0,5s$, β) $t_2=1s$ και γ) $t_3=1,5s$.

iv) Πόση είναι η ισχύς της δύναμης Laplace τις παραπάνω χρονικές στιγμές και ποια η αντίστοιχη ισχύς της δύναμης F;

Απάντηση:

i) Θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική και δουλεύοντας με αλγεβρικές τιμές έχουμε για την κίνηση του αγωγού ΔΖ:

$$\upsilon=\upsilon_o+αt \quad (1) \quad \text{και} \quad Δx = \upsilon_o t + ½\, αt^2 \quad (2)$$

Θέτοντας στην (1) υ=0 υπολογίζουμε τον χρόνο κίνησης:

$$0 = \upsilon_o + αt_{ολ} \rightarrow t_{ολ} = -\frac{\upsilon_o}{α} = -\frac{4}{-2}s = 2s$$

Αλλά και τη συνολική μετατόπιση μέχρι να σταματήσει:

$$Δx_{ολ}=4\cdot 2m + ½\,(-2)\cdot 2^2 m=4m$$

Έτσι μέγιστη μαγνητική ροή θα έχουμε στη θέση που ο αγωγός σταματά, αφού τότε έχουμε μέγιστο εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΔΖΓ:

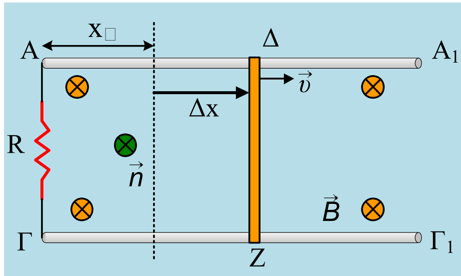
$$\Phi_{max}=B\cdot S_{max}=B\cdot \ell(x_o+\Delta x) = 0{,}5\cdot 1\cdot (0{,}5+4)\,Wb=2{,}25\,Wb$$

Ας σημειωθεί ότι ο αγωγός ΔΖ σταματά σε απόσταση 4,5m από τα άκρα ΑΓ, πριν φτάσει σε απόσταση d=5m, όπου είναι και το μήκος των παραλλήλων ράβδων.

ii) Έστω ότι τη χρονική στιγμή t, ο αγωγός ΔΖ έχει μετατοπισθεί κατά Δx όπου:

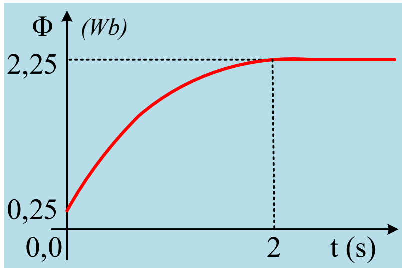
$\Delta x = \upsilon_o t + ½\, \alpha t^2 = 4\cdot t + ½\, (-2)\cdot t^2 = 4t - t^2$ (μονάδες στο S.I.)

ευρισκόμενος στη θέση που δείχνει το σχήμα. Τη στιγμή αυτή, από το σχηματιζόμενο ορθογώνιο ΑΔΖΓ διέρχεται μαγνητική ροή:



$$\Phi=B\cdot S\cdot \sigma\upsilon\nu 0^\circ=B\cdot \ell(x_o+\Delta x) \rightarrow$$

$$\Phi=0{,}5\cdot 1\cdot (0{,}5+4t-t^2)=0{,}25+2t-0{,}5t^2 \quad \text{(S.I.)}$$



Η παραπάνω συνάρτηση της μαγνητικής ροής, είναι δευτέρου βαθμού, οπότε η γραφική της παράσταση θα είναι μια παραβολή με τα κοίλα προς τα κάτω, όπως στο διπλανό σχήμα.

iii) Βλέπουμε τη μαγνητική ροή να αυξάνεται από 0-2s, αλλά η κλίσης της γραφικής παράστασης, η οποία μας δίνει την ΗΕΔ από επαγωγή, να μην παραμένει σταθερή. Έτσι… αλλάζουμε δρόμο!

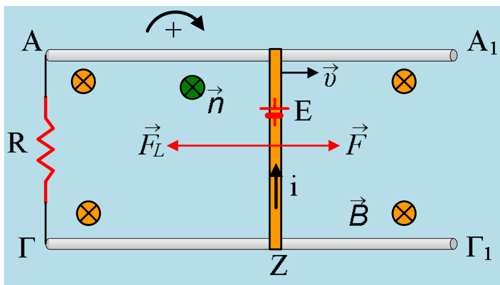
Η ΗΕΔ που αναπτύσσεται στο ορθογώνιο, θα προκύψει από τον νόμο της επαγωγής, για την τυχαία χρονική στιγμή, όπου:

$$E=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d(B\ell(x_o+x)}{dt}=-B\ell\cdot\frac{dx}{dt}=-B\ell\upsilon$$

$$E=-B\cdot\ell\cdot(\upsilon_o+\alpha t) = -\,0{,}5\cdot 1\cdot(4-2t) = -2+t \quad (S.I.)$$

Αλλά τότε από τον νόμο του Ohm παίρνουμε:

$$i=\frac{E}{R}=\frac{-2+t}{0{,}5}=-4+2t \quad (S.I.)$$



Η φορά του επαγωγικού αυτού ρεύματος, σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz θα είναι αυτή του σχήματος, έτσι ώστε να ασκείται στον αγωγό ΔΖ δύναμη Laplace, η οποία τείνει να τον σταματήσει.

Με αντικατάσταση του χρόνου βρίσκουμε την ένταση του ρεύματος τις χρονικές στιγμές:

Για $t_1=0{,}5s \rightarrow i_1=-3$ A, για $t_2=1s \rightarrow i_2=-2$ A και για $t_3=1{,}5s \rightarrow i_3=-1$ A.

Οπότε οι ζητούμενοι ρυθμοί παραγωγής θερμότητας, τις παραπάνω στιγμές, θα είναι ίσοι:

$$\frac{dQ_1}{dt}=i_1^2R=(-3)^2\cdot 0{,}5\,J/s=4{,}5\,J/s$$

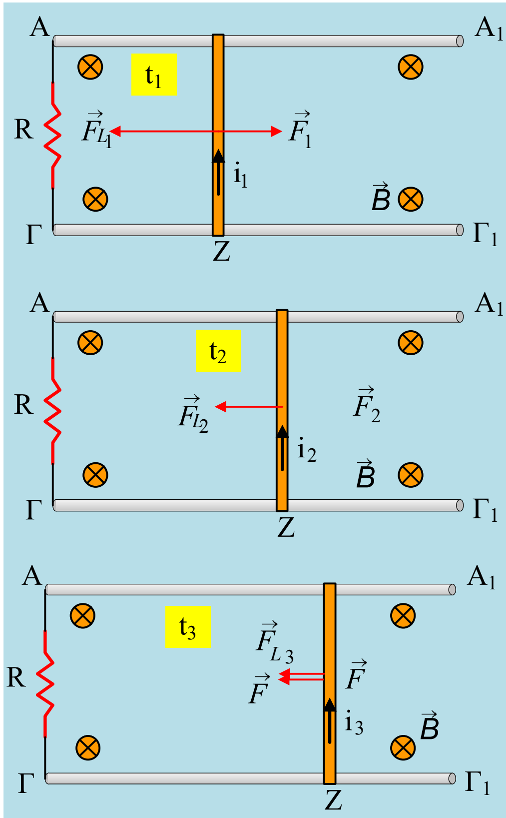
$$\frac{dQ_2}{dt}=i_2^2R=(-2)^2\cdot 0{,}5\,J/s=2\,J/s$$

$$\frac{dQ_3}{dt} = i_3^2 R = (-1)\cdot 0{,}5\, J/s = 0{,}5\, J/s$$

Παρατήρηση:

Παραπάνω πήραμε την κάθετο στο ορθογώνιο n να έχει την ίδια φορά με την ένταση του πεδίου, αλλά τότε ουσιαστικά ορίσαμε ως θετική φορά διαγραφής του πλαισίου την ωρολογιακή ΑΔΖΓ. Βρήκαμε την ΗΕΔ και την ένταση του ρεύματος αρνητική, πράγμα που μας επιτρέπει να σημειώσουμε τη φορά του ρεύματος, αντίθετη της φοράς περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, όπως φαίνεται στο τελευταίο σχήμα. Βέβαια η ισχύς στον αντιστάτη δεν καθορίζεται από την φορά του ρεύματος (η ένταση είναι στο τετράγωνο) και γι' αυτό προκύπτει πάντα θετική.

iv) Η δύναμη Laplace έχει κατεύθυνση πάντα προς τα αριστερά, με βάση τον κανόνα των τριών δακτύλων, αντίθετη της ταχύτητας.



α) τη στιγμή t_1 το μέτρο της και η ισχύς της είναι:

$$|F_{L1}| = B\cdot i_1\cdot \ell = 0{,}5\cdot 3\cdot 1\text{N} = 1{,}5\text{N}$$

$$P_{FL1} = |F_{L1}|\cdot \upsilon_1\cdot \text{συν}180^\circ = -|F_{L1}|\cdot(\upsilon_o + \alpha t_1) = -1{,}5\cdot(4-2t) \rightarrow$$

$$P_{FL1} = -1{,}5\cdot 3\text{W} = -4{,}5\text{W}$$

β) για τη στιγμή t_2:

$$|F_{L2}| = B\cdot i_2\cdot \ell = 0{,}5\cdot 2\cdot 1\text{N} = 1\text{N}$$

$$P_{FL2} = |F_{L2}|\cdot \upsilon_2\cdot \text{συν}180^\circ = -|F_{L2}|\cdot(\upsilon_o + \alpha t_2) \rightarrow$$

$$P_{FL2} = -1\cdot(4-2t) = -1\cdot 2\text{W} = -2\text{ W}$$

γ) για $t_3=1{,}5$s:

$$|F_{L3}| = B\cdot i_3\cdot \ell = 0{,}5\cdot 1\cdot 1\text{N} = 0{,}5\text{N}$$

$$P_{FL3} = |F_{L3}|\cdot \upsilon_3\cdot \text{συν}180^\circ = -|F_{L3}|\cdot(\upsilon_o + \alpha t_3) = -0{,}5\cdot(4-2t)$$

$$P_{FL3} = -0{,}5\cdot 1\text{W} = -0{,}5\text{ W}$$

Εξάλλου εφαρμόζοντας το 2º νόμο του Νεύτωνα για την κίνηση του αγωγού ΔΖ παίρνουμε (η θετική φορά προς τα δεξιά, άρα $\alpha=-2\text{m/s}^2$ και $F_L=-|F_L|$):

$$\Sigma F = m\cdot\alpha \rightarrow F - |F_L| = m\cdot\alpha \rightarrow F = |F_L| + m\cdot\alpha = |F_L| + 0{,}5\cdot(-2)\text{N} = |F_L| - 1\text{N}.$$

Έτσι για τις παραπάνω χρονικές στιγμές θα πάρουμε:

$$F_1 = 1{,}5\text{N} - 1\text{N} = 0{,}5\text{N} \quad \text{και } P_1 = |F_1|\cdot|\upsilon_1|\cdot\text{συν}0^\circ = 0{,}5\cdot 3\text{W} = 1{,}5\text{W}$$

$$F_2 = 1\text{N} - 1\text{N} = 0 \quad \text{και } P_2 = 0$$

$$F_3 = 0{,}5\text{N} - 1\text{N} = -0{,}5\text{N} \quad \text{και } P_3 = |F_3|\cdot|\upsilon_3|\cdot\text{συν}180^\circ = -0{,}5\cdot 1\text{W} = -0{,}5\text{W}$$

Σχόλιο:

Αξίζει να δούμε τι συμβαίνει με την ενέργεια του αγωγού ΔΖ. Αρχικά έχει μια κινητική ενέργεια, την οποία «χάνει» σιγά – σιγά, αφού εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση.

- Τη στιγμή t_1 η κινητική του ενέργεια μεταβάλλεται με ρυθμό:

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = |\Sigma F| \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu 180° = -m|a| \cdot \upsilon = -0{,}5 \cdot 2 \cdot 3\, J/s = -3\, J/s$$

Αφού η δύναμη Laplace αφαιρεί ενέργεια με ρυθμό 4,5J/s (και τα μετατρέπει σε ηλεκτρική και τελικά σε θερμότητα στον αντιστάτη), ενώ η F προσφέρει ενέργεια στον αγωγό με ρυθμό 1,5J/s.

- Τη στιγμή t_2 έχουμε αντίστοιχα:

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = -m|a| \cdot \upsilon = -0{,}5 \cdot 2 \cdot 2\, J/s = -2\, J/s$$

Όση είναι και η ισχύς της δύναμης Laplace, αφού είναι μηδενική η δύναμη F.

- Τέλος τη στιγμή t_3 έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = -m|a| \cdot \upsilon = -0{,}5 \cdot 2 \cdot 1\, J/s = -1\, J/s$$

Αφού ενέργεια από τον αγωγό αφαιρεί και η δύναμη Laplace με ρυθμό 0,5J/s και η ασκούμενη δύναμη F με ρυθμό επίσης 0,5J/s. Αν προσέξτε το τελευταίο σχήμα τη στιγμή αυτή και οι δύο δυνάμεις αντιστέκονται στην κίνηση του αγωγού.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης