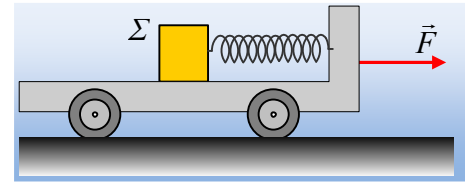


Ένα σώμα πάνω σε αμαξίδιο.

Ένα σώμα Σ μάζας $m=9\text{kg}$ ηρεμεί πάνω σε ένα ακίνητο αμαξίδιο μάζας $M=1\text{kg}$, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=40\text{N/m}$, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του $\ell_0=40\text{cm}$. Σε μια στιγμή ($t_0=0$) ασκούμε στο αμαξίδιο μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F=4\text{N}$, μέχρι τη στιγμή $t_1=10\text{s}$, όπου η δύναμη παύει να ασκείται.

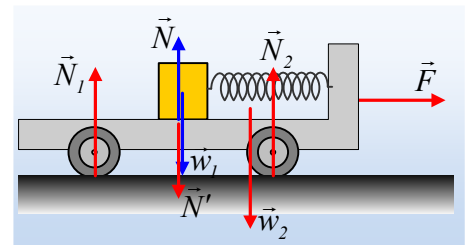


- i) Αμέσως μόλις ασκηθεί η δύναμη F (για $t=0^+$), να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής:
 - α) του σώματος Σ και
 - β) του αμαξιδίου.
- ii) Να υπολογιστεί η ορμή και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος των δύο σωμάτων, τη στιγμή $t_2 = 4\text{s}$.
- iii) Κάποια στιγμή ($t_3 < 10\text{s}$) το ελατήριο έχει μήκος $\ell_1=55\text{cm}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής κάθε σώματος τη στιγμή αυτή.
- iv) Μια στιγμή ($t_4 > 10\text{s}$) η ταχύτητα του αμαξιδίου έχει μέτρο $v_2= 3,2\text{m/s}$, με φορά προς τα δεξιά, ενώ το ελατήριο έχει μήκος $\ell_1=30\text{cm}$. Να βρεθούν για τη στιγμή αυτή:
 - α) Η ταχύτητα του σώματος Σ .
 - β) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής κάθε σώματος.
- v) Πόση ενέργεια μεταφέρθηκε στο σύστημα μέσω του έργου της δύναμης F ;

Δίνεται ότι δεν αναπτύσσονται τριβές, ούτε μεταξύ σώματος Σ και αμαξιδίου, ούτε μεταξύ αμαξιδίου και εδάφους. Υπενθυμίζεται ότι η δύναμη του ελατηρίου είναι ανάλογη της παραμόρφωσής του, σύμφωνα με το νόμο του Hooke $F_{ελ} = k \cdot \Delta\ell$, ενώ ένα παραμορφωμένο ελατήριο έχει δυναμική ενέργεια η οποία υπολογίζεται από την εξίσωση $U_{ελ} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2$.

Απάντηση:

- i) Αμέσως μόλις ασκηθεί η δύναμη F , το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του, με αποτέλεσμα να μην ασκεί δυνάμεις στα άκρα του. Αλλά τότε οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ και στο αμαξίδιο είναι αυτές που έχουν σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα.



- α) Για το σώμα Σ :

$$\frac{\Delta\vec{p}_\Sigma}{\Delta t} = \Sigma\vec{F} = 0$$

- β) Για το αμαξίδιο:

$$\frac{\Delta \vec{p}_a}{\Delta t} = \Sigma \vec{F}_a = \vec{F} \rightarrow \frac{\Delta p_a}{\Delta t} = F = 4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

ii) Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για το σύστημα Σ-αμαξίδιο παίρνουμε:

$$\frac{\Delta \vec{p}_{o\lambda}}{\Delta t} = \Sigma \vec{F}_{o\lambda}$$

Όπου $\Sigma \vec{F}_{o\lambda}$ το διανυσματικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ασκούνται στα σώματα του συστήματος.

Όμως οι εσωτερικές δυνάμεις αποτελούν πάντα ζεύγη δράσης – αντίδρασης όπου $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, οπότε οι μόνες δυνάμεις που θα πρέπει να λάβουμε υπόψη είναι οι εξωτερικές δυνάμεις. Στην περίπτωση μας τα δυο βάρη \vec{w}_1, \vec{w}_2 , οι αντιδράσεις του επιπέδου \vec{N}_1 και \vec{N}_2 και η δύναμη \vec{F} . Αλλά το σύστημα ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση, οπότε $\Sigma \vec{F}_y = 0 \rightarrow \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0$ και η εξίσωση γίνεται (λαμβάνοντας υπόψη ότι η δύναμη F είναι σταθερή, οπότε ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι ίσος και με το μέσο ρυθμό μεταβολής):

$$\frac{\Delta \vec{p}_{o\lambda}}{\Delta t} = \Sigma \vec{F}_{e\zeta} = \vec{F} \rightarrow$$

$$\frac{p_{o\lambda/2} - 0}{t_2 - 0} = F \rightarrow p_{o\lambda/2} = F \cdot t_2 = 16 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\text{Ενώ } \frac{\Delta p_{o\lambda}}{\Delta t} = F = 4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

iii) Τη στιγμή t_3 που το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta \ell = \ell - \ell_0 = 0,55 \text{ m} - 0,4 \text{ m} = 0,15 \text{ m}$ ασκεί δυνάμεις στο σώμα Σ και στο αμαξίδιο, όπως στο σχήμα, μέτρου:

$$F_{e\lambda} = k \cdot \Delta \ell = 40 \cdot 0,15 \text{ N} = 6 \text{ N}.$$

Αλλά τότε για το σώμα Σ:

$$\frac{\Delta \vec{p}_\Sigma}{\Delta t} = \Sigma \vec{F} \rightarrow \frac{\Delta p_\Sigma}{\Delta t} = F_{e\lambda} = 6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

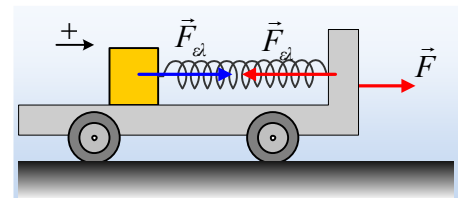
Για το αμαξίδιο:

$$\frac{\Delta \vec{p}_a}{\Delta t} = \Sigma \vec{F}_a = \vec{F} + \vec{F}_{e\lambda} \rightarrow \frac{\Delta p_a}{\Delta t} = F - F_{e\lambda} = (4 - 6) \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = -2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

iv) Μετά την κατάργηση της ασκούμενης δύναμης F, το σύστημα των σωμάτων είναι μονωμένο, οπότε από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$\vec{p}_{o\lambda/1} = \vec{p}_{o\lambda/4} \quad (1)$$

Όπου $\vec{p}_{o\lambda/1}$ η ορμή του συστήματος τη στιγμή $t_1=10\text{s}$. Αλλά από το γενικευμένο νόμο, εφαρμόζοντάς τον στο διάστημα 0-10s παίρνουμε:



$$\frac{\Delta \vec{p}_{o\lambda/1}}{\Delta t} = \Sigma \vec{F}_{\varepsilon\zeta} = \vec{F} \rightarrow$$

$$\frac{p_{o\lambda/1} - 0}{t_1 - 0} = F \rightarrow p_{o\lambda/1} = F \cdot t_1 = 4 \cdot 10 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 40 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

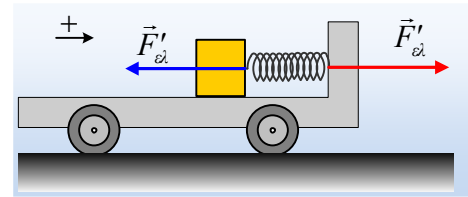
α) Με βάση τα παραπάνω αν v_1 η ταχύτητα του σώματος Σ τη στιγμή t_4 , παίρνουμε από την (1):

$$p_{o\lambda/1} = m \cdot v_1 + M \cdot v_2 \rightarrow$$

$$v_1 = \frac{p_{o\lambda/1} - M v_2}{m} = \frac{40 - 1 \cdot 3,2}{9} \text{ m/s} \approx 4,1 \text{ m/s}$$

β) Τη χρονική στιγμή t_4 το ελατήριο είναι **συσπειρωμένο** κατά $\Delta \ell' = \ell_0 - \ell_4 = 0,1 \text{ m}$ ασκώντας στα σώματα δυνάμεις, όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$F'_{\varepsilon\lambda} = k \cdot \Delta \ell' = 40 \cdot 0,1 \text{ N} = 4 \text{ N}$$



οπότε η ορμή κάθε σώματος μεταβάλλεται με ρυθμό:

Σώμα Σ :

$$\frac{\Delta \vec{p}_{\Sigma}}{\Delta t} = \Sigma \vec{F} \rightarrow \frac{\Delta p_{\Sigma}}{\Delta t} = -F'_{\varepsilon\lambda} = -4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

Αμαξίδιο:

$$\frac{\Delta \vec{p}_a}{\Delta t} = \Sigma \vec{F}_a = +\vec{F}'_{\varepsilon\lambda} \rightarrow \frac{\Delta p_a}{\Delta t} = +F'_{\varepsilon\lambda} = +4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

γ) Μόλις πάψει η άσκηση της δύναμης F , μέσω του έργου της οποίας μεταφέρεται ενέργεια στο σύστημα, η ενέργειά του παραμένει σταθερή. Έτσι η ενέργεια που μεταφέρεται στο σώμα, είναι ίση με την ενέργεια του συστήματος τη στιγμή t_4 .

$$W_F = K_1 + K_2 + U_{\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} M v_2^2 + \frac{1}{2} k (\Delta \ell')^2 \rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{2} 9 \cdot 4,1^2 \text{ J} + \frac{1}{2} 1 \cdot 3,2^2 \text{ J} + \frac{1}{2} 40 \cdot 0,1^2 \text{ J} \approx 80,97 \text{ J}.$$

dmargaris@gmail.com