# *Η επιτάχυνση και ο ρόλος της.*

Το μέγεθος «επιτάχυνση» το συναντήσαμε κατά τη διδασκαλία στην Α΄ Λυκείου, όπου και ορίσθηκε με βάση την εξίσωση:

$$\vec{\alpha} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$$

Όπου η παραπάνω μαθηματική εξίσωση μας λέει ότι η επιτάχυνση:

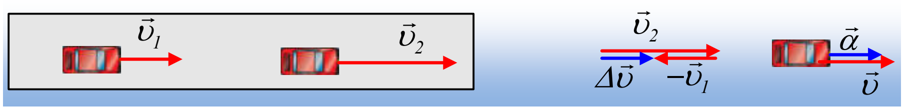
- Έχει κατεύθυνση, την κατεύθυνση της **μεταβολής** της ταχύτητας

- Το μέτρο της ισούται με το ρυθμό **μεταβολής** της ταχύτητας.

Ας δούμε λοιπόν πώς εφαρμόζονται ή προσαρμόζονται τα παραπάνω σε κάποιες περιπτώσεις:

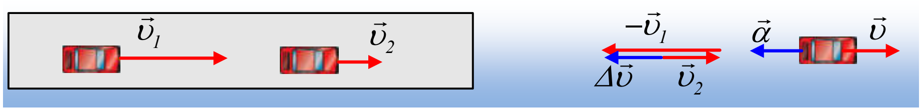
### *1. Ευθύγραμμη κίνηση:*

i) Το σώμα του σχήματος κινείται ευθύγραμμα και η ταχύτητά του αυξάνεται από την τιμή $\upsilon_1$ στην τιμή $\upsilon_2$.




Η επιτάχυνση έχει την ίδια **διεύθυνση** με την ταχύτητα και **φορά** προς τα δεξιά, ίδια φορά με το διάνυσμα $\Delta\vec{\upsilon}$ της μεταβολής της ταχύτητας.

ii) Στο παρακάτω σχήμα, αντίθετα με πριν, το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται.




Η επιτάχυνση έχει την ίδια **διεύθυνση** με την ταχύτητα και **φορά** προς τα αριστερά, ίδια φορά με το διάνυσμα $\Delta\vec{\upsilon}$ της μεταβολής της ταχύτητας.

iii) Ποιο είναι το αποτέλεσμα της ύπαρξης επιτάχυνσης;

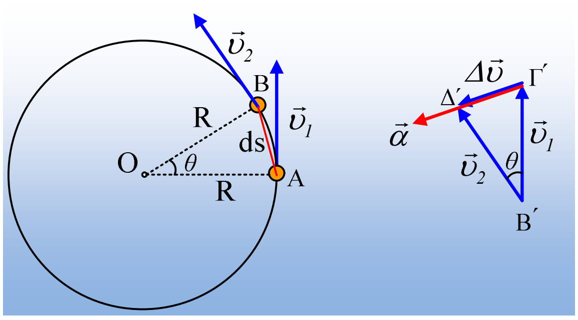
Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις η επιτάχυνση έχει την **ίδια διεύθυνση** με την ταχύτητα. Στην πρώτη περίπτωση έχει ΚΑΙ την ***ίδια φορά***, οπότε το μέτρο της ταχύτητας **αυξάνεται**, στη δεύτερη περίπτωση η επιτάχυνση έχει **αντίθετη φορά** από την ταχύτητα και το μέτρο της ταχύτητας **μειώνεται**.

Πάντως και στις δύο περιπτώσεις η επιτάχυνση συνδέεται με **αλλαγή του μέτρου** της ταχύτητας.

## *2. Ομαλή κυκλική κίνηση.*

Στην ομαλή κυκλική κίνηση το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό, μεταβάλλεται όμως η διεύθυνση της ταχύτητας, η οποία είναι διαρκώς εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά. Αλλά τότε έχουμε μεταβολή της ταχύτητας, συνεπώς έχουμε επιτάχυνση.

Ας δούμε ένα μικρό σώμα που εκτελεί ομαλή κυκλική τροχιά μετακινούμενο από τη θέση Α με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ στη θέση Β με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$ όπου $|\vec{\upsilon}_1| = |\vec{\upsilon}_2| = \upsilon$, όπως στο παρακάτω σχήμα, όπου η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία την οποία διαγράφει η επιβατική ακτίνα είναι θ.




Στο δεξιό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυο ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$ και η μεταβολή της ταχύτητας $\Delta\vec{\upsilon}$. Τα τρίγωνα ΟΑΒ και Β΄Γ΄Δ΄ είναι όμοια αφού είναι ισοσκελή με γωνία κορυφής θ (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές), οπότε:

$$\frac{(OA)}{(AB)} = \frac{(B'\Gamma')}{(\Gamma'\Delta')} \rightarrow \frac{R}{ds} = \frac{\upsilon}{d\upsilon} \rightarrow ds = \frac{R}{\upsilon} d\upsilon \rightarrow$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{R}{\upsilon} \cdot \frac{d\upsilon}{dt} \rightarrow \upsilon = \frac{R}{\upsilon} \cdot \alpha \rightarrow \alpha = \frac{\upsilon^2}{R}$$

Αν τώρα τα σημεία Α και Β είναι πολύ κοντά, ισοδύναμα αν το χρονικό διάστημα για την μετακίνηση από το Α στο Β είναι απειροελάχιστο ( το dt→0) τότε η γωνία θ→0 και στο ισοσκελές τρίγωνο Β΄Γ΄Δ΄ οι παρά τη βάση γωνίες τείνουν προς τις 90°. Με άλλα λόγια το διάνυσμα $\Delta\vec{\upsilon}$ άρα και το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$ είναι κάθετο στην ταχύτητα, με φορά προς το κέντρο του κύκλου.

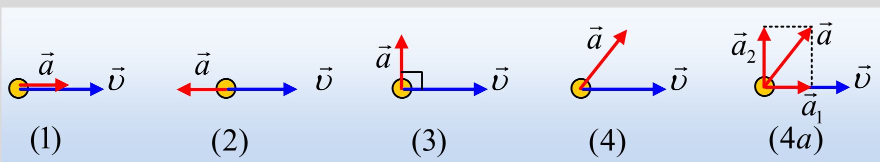
(Η παραπάνω μαθηματική απόδειξη μπορεί να παραληφθεί από ένα μαθητή…)

**Συμπέρασμα:** Στην ομαλή κυκλική κίνηση το σώμα έχει επιτάχυνση, κάθετη στην ταχύτητα, άρα πάνω στην ακτίνα του κύκλου, με φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, η οποία μεταβάλει τη διεύθυνση της ταχύτητας, χωρίς να αλλάζει το μέτρο της ταχύτητας του σώματος.

## *3. Και αν η κυκλική κίνηση δεν είναι ομαλή;*

Τότε δεν έχουμε παρά να συνδυάσουμε τις δύο παραπάνω περιπτώσεις:

- Αν η επιτάχυνση έχει την ίδια διεύθυνση με την ταχύτητα, τότε μεταβάλλει μόνο το μέτρο της ταχύτητας. Έτσι στο σχήμα (1) το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται, ενώ στο σχήμα (2) μειώνεται.



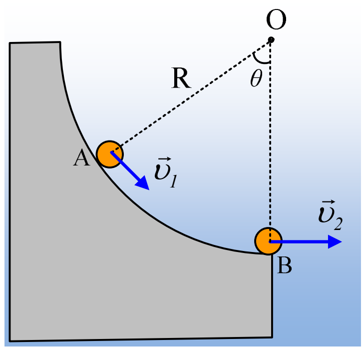
- Αν η επιτάχυνση είναι κάθετη στην ταχύτητα, σχήμα (3), τότε μεταβάλλεται μόνο η διεύθυνση της ταχύτητας, αλλά όχι το μέτρο της.
- Τέλος, αν το διάνυσμα της επιτάχυνσης σχηματίζει κάποια άλλη γωνία με το διάνυσμα της ταχύτητας, σχήμα (4), θα προκαλεί μεταβολή ΚΑΙ στο μέτρο ΚΑΙ στη διεύθυνση της ταχύτητας.

Στο σχήμα ($4^α$) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι στην περίπτωση αυτή η επιτάχυνση μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες, όπου η συνιστώσα $α_1$ μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας (αφού έχει τη διεύθυνση της ταχύτητας), ενώ η συνιστώσα $α_2$ την διεύθυνσή της (μιας και είναι κάθετη στην ταχύτητα).

Μας είναι λοιπόν χρήσιμο, να δώσουμε ονόματα στις δυο αυτές συνιστώσες της επιτάχυνσης. Η συνιστώσα $α_1$ που έχει τη διεύθυνση της ταχύτητας (είναι δηλαδή εφαπτόμενη στην τροχιά) ονομάζεται **επιτρόχια** επιτάχυνση (επί της τροχιάς), ενώ η συνιστώσα $α_2$ η κάθετη στην ταχύτητα, ονομάζεται **κεντρομόλος** επιτάχυνση.

## *Εφαρμογή 1η:*

Κατά μήκος της κατακόρυφης κυκλικής τροχιάς του σχήματος, ακτίνας R=1m, κινείται μια μικρή σφαίρα μάζας m=2kg, χωρίς τριβές. Σε μια στιγμή περνά από τη θέση Α με ταχύτητα $υ_1$=5m/s. Αν ημθ=0,6 και συνθ=0,8, ενώ g=10m/s$^2$:



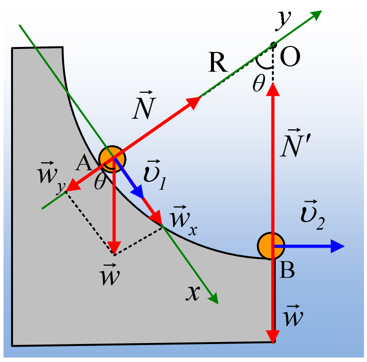

i) Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί η τροχιά στη σφαίρα στη θέση Α.

ii) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας της σφαίρας.

iii) Ποιος ο ρυθμός του μέτρου της ταχύτητας στη θέση Β, όπου η ακτίνα ΟΒ είναι κατακόρυφη;

### *Απάντηση:*

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα στην παραπάνω θέση, φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Αναλύοντας το βάρος σε δυο συνιστώσες, πάνω στους άξονες x,y, όπου ο x είναι στην διεύθυνση της εφαπτομένης και y στη διεύθυνση της ακτίνας, θα έχουμε:




$$ΣF_y = ma_y \rightarrow N - w_y = ma_k \rightarrow N - w_y = m\frac{υ_1^2}{R} \quad (1)$$

$$ΣF_x = ma_x \rightarrow w_x = ma_ε \quad (2)$$

i) Από την (1) υπολογίζουμε το μέτρο της κάθετης αντίδρασης Ν:

$$N = mg \cdot συνθ + m\frac{υ_1^2}{R} = 0,4 \cdot 10 \cdot 0,8N + 0,4\frac{5^2}{1}N = 13,2N$$

ii) Ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας είναι ίσος με τη συνιστώσα της επιτάχυνσης την παράλληλη στην ταχύτητα. Άρα το ζητούμενο δεν είναι άλλο από την επιτρόχια επιτάχυνση. Από την (2) λοιπόν παίρνουμε:

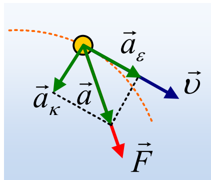
$$mg\eta\mu\theta = m\alpha_\varepsilon \rightarrow \alpha_\varepsilon = g\eta\mu\theta = 10\cdot 0{,}6m/s^2 \rightarrow \alpha_\varepsilon = 6m/s^2$$

iii) Στο παραπάνω σχήμα έχουν σχεδιαστεί και οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα στη θέση Β, δυνάμεις κατακόρυφες. Αλλά τότε και η επιτάχυνση θα είναι κατακόρυφη, κάθετη στην ταχύτητα, συνεπώς θα είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση, υπεύθυνη για την αλλαγή της διεύθυνσης της ταχύτητα. Η επιτρόχιος επιτάχυνση θα είναι μηδενική, οπότε και

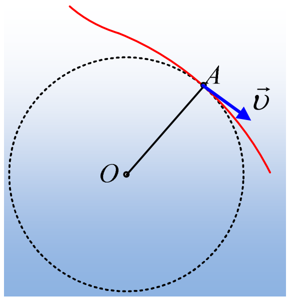
$$a_\varepsilon = \frac{d|\upsilon|}{dt} = 0$$

## 4. Υπάρχει και καμπυλόγραμμη κίνηση.

Γιατί όμως να μιλάμε μόνο για κυκλική κίνηση. Υπάρχουν και καμπυλόγραμμες κινήσεις που η τροχιά δεν είναι κυκλική, αλλά άλλη καμπύλη. Τότε ισχύουν ακριβώς όσα είπαμε παραπάνω για την κυκλική κίνηση:

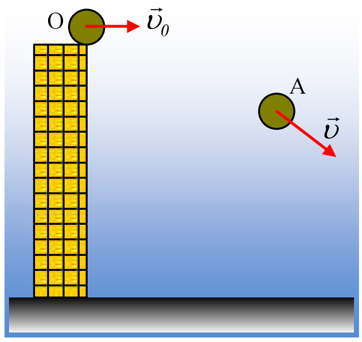



Σε κάθε καμπυλόγραμμη κίνηση, η ταχύτητα είναι εφαπτόμενη στην τροχιά σε κάθε σημείο (σκεφτείτε οριζόντια βολή ή κυκλική κίνηση). Η επιτάχυνση όμως έχει την κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης και κατευθύνεται πάντα προς το εσωτερικό μέρος της τροχιάς. Η επιτάχυνση αυτή, μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες. Μία, στη διεύθυνση της ταχύτητας, η οποία ονομάζεται ***επιτρόχια επιτάχυνση*** και η οποία ευθύνεται για την αλλαγή του μέτρου της ταχύτητας και μία κάθετη στην ταχύτητα, η οποία ονομάζεται ***κεντρομόλος επιτάχυνση***, η οποία προκαλεί μεταβολή στην διεύθυνση της ταχύτητας.




Η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει μέτρο $a_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R}$, όπου R η ακτίνα ενός υποθετικού κύκλου, ο οποίος μπορεί να προσεγγίσει την καμπύλη τροχιά στο συγκεκριμένο σημείο. Η ακτίνα αυτή ονομάζεται και **ακτίνα καμπυλότητας** της τροχιάς στη θέση Α.

### *Εφαρμογή 2η:*




Ένα σώμα εκτοξεύεται οριζόντια από ορισμένο ύψος με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0$=10m/s. Μετά από χρόνο t=1s να βρεθούν:

i) Η ταχύτητά του, καθώς και η θέση του Α, στην οποία βρίσκεται.

ii) Η κεντρομόλος και η επιτρόχια επιτάχυνσή του

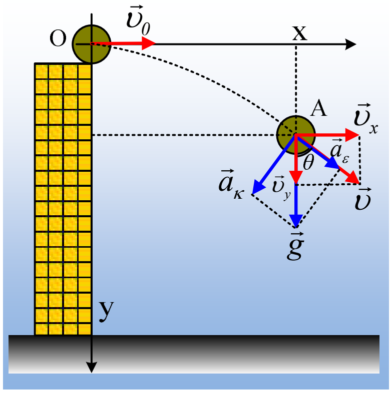
iii) Η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς στη θέση Α.

***Απάντηση:***

Παίρνοντας το σύστημα αξόνων x, y, όπως στο παρακάτω σχήμα και θεωρώντας την κίνηση του σώματος σύνθετη, μια ευθύγραμμη ομαλή στην οριζόντια διεύθυνση και μια ελεύθερη πτώση στην κατακόρυφη διεύθυνση, έχουμε:

$$\upsilon_x=\upsilon_0 \quad \kappa\alpha\iota\ x=\upsilon_0\cdot t$$

$$\upsilon_y=g\cdot t \quad \kappa\alpha\iota\ y = ½\, gt^2.$$




i) Έτσι τη στιγμή $t_1$=1s το σώμα έχει αποκτήσει κατακόρυφη ταχύτητα:

$$\upsilon_y=g\cdot t_1=10\cdot 1\text{m/s}=10\text{m/s}$$

οπότε η ταχύτητά του έχει μέτρο:

$$\upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}=\sqrt{10^2+10^2}m/s=10\sqrt{2}m/s$$

Σχηματίζοντας με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ=45° (το παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο…)

Όσον αφορά τις συντεταγμένες του σημείου Α έχουμε:

$$x_A=\upsilon_0\cdot t=10\cdot 1m=10m\ \kappa\alpha\iota$$

$$y_A= ½\, gt^2= ½ \cdot 10\cdot 1^2m=5m.$$

ii) Με βάση το παραπάνω σχήμα, θα έχουμε:

$$\alpha_\kappa=\alpha\cdot\eta\mu\theta=g\cdot\eta\mu\theta=10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}m/s^2=5\sqrt{2}m/s^2$$

$$a_\varepsilon=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=g\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}m/s^2=5\sqrt{2}m/s^2$$

iii) Επιστρέφοντας στην κεντρομόλο επιτάχυνση, βρίσκουμε την ακτίνα καμπυλότητας:

$$a_\kappa=\frac{\upsilon^2}{R}\rightarrow$$

$$R=\frac{\upsilon^2}{a_\kappa}=\frac{\left(10\sqrt{2}\right)^2}{5\sqrt{2}}m=20\sqrt{2}m$$

**dmargaris@gmail.com**