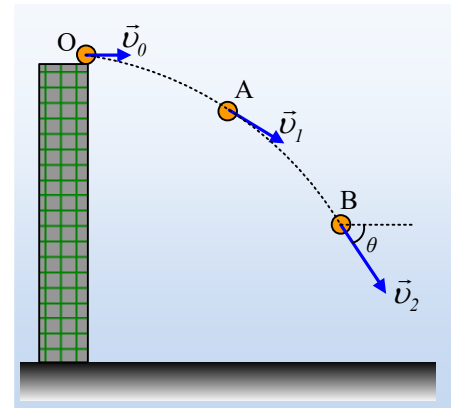


Οριζόντια βολή και έργα

Μια μπάλα εκτοξεύεται από ορισμένο ύψος από το έδαφος, με οριζόντια ταχύτητα $v_0=20\text{m/s}$ τη στιγμή $t_0=0$. Μετά από λίγο τη στιγμή t_1 περνά από μια θέση A και τη στιγμή t_2 , που η ταχύτητά της σχηματίζει γωνία $\theta=45^\circ$ με την οριζόντια διεύθυνση, από τη θέση B.



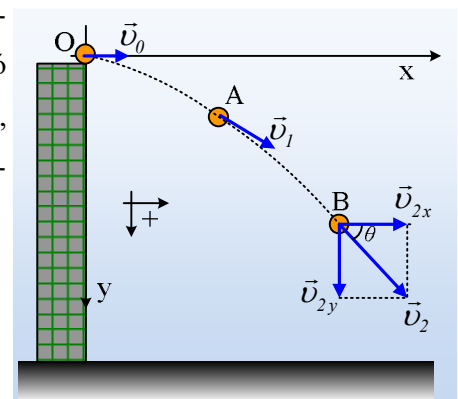
- i) Να βρεθεί η στιγμή t_2 , καθώς και η ταχύτητα v_2 της μπάλας τη στιγμή αυτή.
- ii) Αν κατά την μετακίνηση από το A στο B η δυναμική ενέργεια της μπάλας μειώθηκε κατά 60J,
 - α) να βρεθεί η μεταβολή της κινητικής ενέργειας, μεταξύ των δύο αυτών θέσεων.
 - β) Να υπολογιστεί το έργο του βάρους από το A στο B.
- iii) Αν η μάζα της μπάλας είναι $m=0,4\text{kg}$, να υπολογιστούν:
 - α) Η χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία η μπάλα περνά από το σημείο A.
 - β) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της μπάλας τις στιγμές t_1 και t_2 .

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$, ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Απάντηση:

- i) Παίρνουμε ένα σύστημα αξόνων x,y με αρχή το σημείο εκτόξευσης O και με τον προσανατολισμό, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Θεωρώντας την κίνηση της πρώτης μπάλας ως σύνθετη, μια ευθύγραμμη ομαλή στην οριζόντια διεύθυνση και μια ελεύθερη πτώση στην κατακόρυφη, θα έχουμε τις εξισώσεις:

Άξονας x	Άξονας y
$v_x=v_0$ (1)	$v_y=\alpha \cdot t=gt$ (3)
$x=v_0 \cdot t$ (2)	$y= \frac{1}{2} g \cdot t^2$ (4)



Τη στιγμή t_2 οι δυο συνιστώσες v_{2x} και v_{2y} έχουν ίσα μέτρα, αφού το ορθογώνιο τρίγωνο είναι και ισοσκελές (αλλιώς το παραλληλόγραμμο των ταχυτήτων είναι τετράγωνο...), οπότε $v_{2y}=20\text{m/s}$ και από την (3) βρίσκουμε:

$$v_{2y} = gt_2 \rightarrow t_2 = \frac{v_{2y}}{g} = \frac{20}{10} \text{ s} = 2\text{ s}$$

Ενώ για το μέτρο της ταχύτητας v_2 έχουμε:

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{20^2 + 20^2} \text{ m/s} = 20\sqrt{2} \text{ m/s}$$

Το παραπάνω μέτρο της ταχύτητας, θα μπορούσαμε να το βρούμε και καθαρά τριγωνομετρικά, αφού γνωρίζουμε την v_{2x} και τη γωνία θ , οπότε:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{v_{2x}}{v_2} \rightarrow v_2 = \frac{v_{2x}}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{20\text{ m/s}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 20\sqrt{2}\text{ m/s}$$

ii) Αν από το A στο B η δυναμική ενέργεια μειώνεται κατά 60J, αυτό ισοδύναμα δηλώνεται λέγοντας ότι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας, είναι $\Delta U_{AB} = -60\text{J}$.

α) Αν όμως η δυναμική ενέργεια μειώνεται κατά 60J, τότε από τη διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, προκύπτει ότι η κινητική ενέργεια αυξάνεται κατά 60J. Ή ισοδύναμα:

$$\Delta K = +60\text{J}.$$

Εναλλακτικά. Από τη στιγμή που στο σώμα ασκείται μόνο με την επίδραση του βάρους, μιας συντηρητικής δύναμης, η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή. Δηλαδή έχουμε:

$$K+U=\text{σταθ.} \rightarrow \Delta K+\Delta U=0 \rightarrow \Delta K=-\Delta U=-(-60\text{J})=+60\text{J}.$$

β) Το έργο του βάρους μεταξύ των δύο παραπάνω θέσεων, δεν εξαρτάται από τη διαδρομή, συνδέεται δε με την δυναμική ενέργεια της μπάλας, με τη σχέση:

$$W_w = U_A - U_B = -\Delta U_{AB} = -(-60\text{J}) = +60\text{J}.$$

Εναλλακτικά. Εφαρμόζοντας ο θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την μπάλα από το A στο B, θα έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_w \rightarrow W_w = \Delta K = 60\text{J}.$$

iii) Αν θεωρήσουμε ότι η δυναμική ενέργεια της μπάλας είναι μηδενική, όταν βρίσκεται στο έδαφος, τότε $U_A = mgh_1$ και $U_B = mgh_2$, οπότε:

$$\Delta U = U_B - U_A = mg(h_2 - h_1) = -mgd = -mg\Delta y \rightarrow$$

$$\Delta y = -\frac{\Delta U}{mg} = -\frac{-60}{0,4 \cdot 10} \text{ m} = 15\text{ m}$$

α) Για την κατακόρυφη απομάκρυνση του σημείου B, από την (4) παίρνουμε:

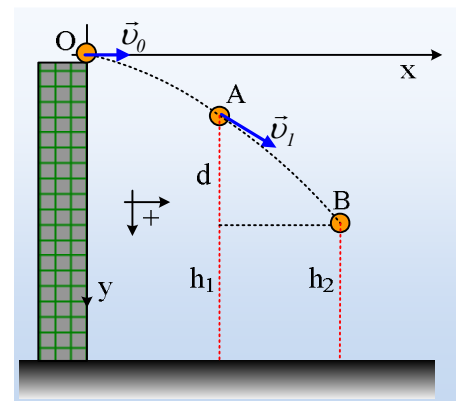
$$y_2 = \frac{1}{2} g \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 \text{ m} = 20\text{ m}$$

ενώ:

$$\Delta y = y_2 - y_1 \rightarrow y_1 = y_2 - \Delta y = 20\text{ m} - 15\text{ m} = 5\text{ m}$$

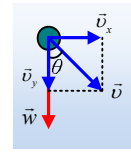
και πάλι από την (4) βρίσκουμε:

$$y_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 \rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2y_1}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{10}} \text{ s} = 1\text{ s}$$



β) Αν κάποια στιγμή, η ταχύτητα μιας μπάλας σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη, όπως στο σχήμα, για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της μπάλας, θα είχαμε:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_w}{dt} = \frac{w \cdot ds \cdot \cos\theta}{dt} = w \cdot v \cdot \cos\theta = w \cdot v_y$$



Οπότε τη στιγμή που η μπάλα περνά από τη θέση Α, έχει κατακόρυφη συνιστώσα ταχύτητας:

$$v_{y1} = gt_1 = 10 \cdot 1 \text{ m/s} = 10 \text{ m/s},$$

και η κινητική της ενέργεια θα αυξάνεται με ρυθμό:

$$\frac{dK_1}{dt} = mg \cdot v_{y1} = 0,4 \cdot 10 \cdot 10 \text{ J/s} = 40 \text{ J/s}$$

Ενώ αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t_2 που περνά από το σημείο Β, έχει κατακόρυφη συνιστώσα ταχύτητας $v_{y2} = 20 \text{ m/s}$ και ο ρυθμός μεταβολής θα είναι:

$$\frac{dK_2}{dt} = mg \cdot v_{y2} = 0,4 \cdot 10 \cdot 20 \text{ J/s} = 80 \text{ J/s}$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης