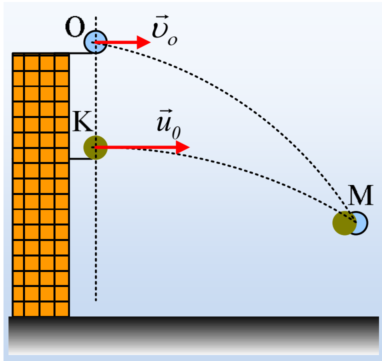
Δυο μπάλες σε συνάντηση στον αέρα

Δυο μπάλες βρίσκονται στα σημεία Ο και Κ της ίδιας κατακόρυφης, η πρώτη στην ταράτσα ενός ψηλού κτηρίου, με ύψος πάνω από 80m και η δεύτερη σε ένα μπαλκόνι που απέχει κατά (ΟΚ)=D=25m από την πρώτη. Κάποια στιγμή $t_0=0$, εκτοξεύεται η πρώτη οριζόντια με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0=10m/s$, ενώ μετά από ένα δευτερόλεπτο, εκτοξεύεται επίσης οριζόντια και στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο, με την πρώτη και η δεύτερη μπάλα με αρχική ταχύτητα $u_0=15m/s$. Ζητούνται:



i) Η απόσταση μεταξύ των δύο μπαλών τη χρονική στιγμή $t_1=1s$.

ii) Η αντίστοιχη απόσταση μεταξύ τους τη χρονική στιγμή $t_2=2s$.

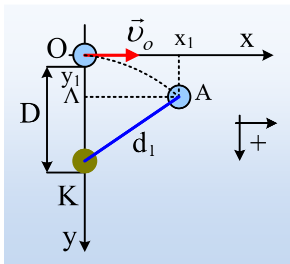
iii) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας κάθε μπάλας, τη στιγμή t_2, αν οι μπάλες έχουν την ίδια μάζα m=0,4kg.

iv) Να αποδειχτεί ότι οι δυο μπάλες θα συγκρουστούν στον αέρα, πριν φτάσουν στο έδαφος και να βρεθεί η θέση της συνάντησης.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$, ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Απάντηση:

i) Παίρνουμε ένα σύστημα αξόνων x,y, με αρχή το σημείο Ο και με τον προσανατολισμό, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Θεωρώντας την κίνηση της πρώτης μπάλας ως σύνθετη, μια ευθύγραμμη ομαλή στην οριζόντια διεύθυνση και μια ελεύθερη πτώση στην κατακόρυφη, θα έχουμε τις εξισώσεις:



Άξονας x	Άξονας y
$\upsilon_{x1}=\upsilon_0$ (1)	$\upsilon_{y1}=\alpha\cdot t=gt$ (3)
$x_1=\upsilon_0\cdot t$ (2)	$y_1=½\, \alpha_y\cdot t^2=½\, g\cdot t^2$ (4)

Τη στιγμή $t_1=1s$, η πρώτη μπάλα φτάνει στη θέση Α, απέχοντας κατά d, από τη θέση Κ της δεύτερης μπάλας (ακόμη δεν έχει αλλάξει θέση). Με αντικατάσταση στις εξισώσεις (2) και (4) βρίσκουμε:

$$x_1=\upsilon_0\cdot t=10\cdot 1m=10m \quad \text{και} \quad y_1=½\, g\cdot t^2=½\, 10\cdot 1^2 m=5m$$

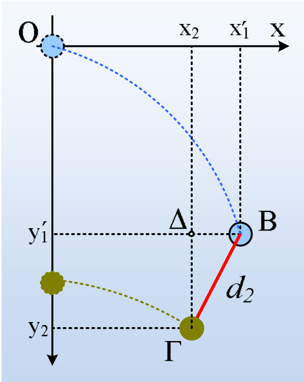
Αλλά τότε με βάση το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΛΚ, θα έχουμε:

$$d_1=\sqrt{(A\Lambda)^2+(\Lambda K)^2}=\sqrt{x_1^2+(y_\kappa-y_1)^2} \rightarrow$$

$$d_1=\sqrt{x_1^2+(y_\kappa-y_1)^2}=\sqrt{10^2+(25-5)^2}\,m=10\sqrt{5}\,m$$

ii) Με την ίδια λογική τη χρονική στιγμή $t_2=2s$, η πρώτη μπάλα θα βρίσκεται στη θέση Β με συντεταγμένες:

$$x_1' = \upsilon_0 t_2 = 10 \cdot 2m = 20m \quad \text{και} \quad y_1' = \frac{1}{2} g t_2^2 = \frac{1}{2} 10 \cdot 2^2 m = 20m$$



Όμως τώρα έχει κινηθεί και η δεύτερη σφαίρα, για την κίνηση της οποίας θα έχουμε (δουλεύουμε με τους ίδιους άξονες):

Άξονας x	Άξονας y
$\upsilon_{x2}=u_0$ (1β)	$\upsilon_{y2}=\alpha\cdot(t-t_1)=g\cdot(t-t_1)$ (3β)
$x_2=u_0\cdot(t-t_1)$ (2β)	$\Delta y_2=½\, \alpha_y\cdot\Delta t^2\rightarrow$ $y_2=y_\kappa+½\, g\cdot(t-t_1)^2$ (4β)

Έτσι τη χρονική στιγμή t_2=2s, η δεύτερη μπάλα έχει φτάσει στη θέση Γ με συντεταγμένες:

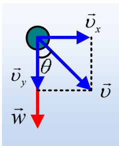
$$x_2=u_0\cdot(t-t_1) = 15\cdot(2-1)m=15m \quad \text{και} \quad y_2= y_\kappa+ ½\, g\cdot(t-t_1)^2 = 25m+ ½\, 10\cdot(2-1)^2 m=30m.$$

Οπότε για την απόσταση μεταξύ τους θα έχουμε, με βάση και το διπλανό σχήμα:

$$d_2 = \sqrt{(\Delta B)^2 + (\Delta \Gamma)^2} = \sqrt{(x_1' - x_2)^2 + (y_2 - y_1')^2} \quad \text{ή}$$

$$d_2 = \sqrt{(20-15)^2 + (30-20)^2}\, m = 5\sqrt{5}m$$

iii) Αν κάποια στιγμή, η ταχύτητα μιας μπάλας σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη, όπως στο σχήμα, για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της μπάλας, θα είχαμε:



$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_w}{dt} = \frac{w \cdot ds \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{dt} = w \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = w \cdot \upsilon_y$$

Οπότε τη στιγμή που η πρώτη μπάλα έχει κατακόρυφη ταχύτητα υ_{y1}=gt=20m/s, η κινητική της ενέργεια θα αυξάνεται με ρυθμό:

$$\frac{dK_1}{dt} = mg \cdot \upsilon_{y1} = 0{,}4 \cdot 10 \cdot 20 J/s = 80 J/s$$

Αντίστοιχα η δεύτερη μπάλα έχει κατακόρυφη συνιστώσα ταχύτητας $\upsilon_{y2}=g(t-t_1)=10\cdot(2-1)$m/s=10m/s και ρυθμό μεταβολής κινητικής ενέργειας:

$$\frac{dK_2}{dt} = mg \cdot \upsilon_{y2} = 0{,}4 \cdot 10 \cdot 10 J/s = 40 J/s$$

iv) Οι δυο μπάλες θα συγκρουστούν στον αέρα, αν κάποια στιγμή βρεθούν στην ίδια θέση. Αν λοιπόν θέσουμε στις παραπάνω εξισώσεις για την κίνηση κάθε μπάλας $x_1=x_2$, για να βρούμε ποια στιγμή θα έχουν την ίδια οριζόντια μετατόπιση, θα πάρουμε $\upsilon_0\cdot t=u_0\cdot(t-t_1)$ και με αντικατάσταση:

$$10t=15(t-1) \quad ή \quad 10t=15t-15 \quad ή \quad t=3s.$$

Οπότε και $x_1=x_2=10t=30$m.

Αλλά τη στιγμή αυτή, η πρώτη μπάλα θα βρίσκεται στη θέση:

$$y_1 = ½\, g \cdot t^2 = ½\, 10 \cdot 3^2 m = 45m$$

Αντίστοιχα η δεύτερη μπάλα θα βρίσκεται στη θέση:

$$y_2 = y_\kappa + ½\, g \cdot (t - t_1)^2 = 25m + ½\, 10 \cdot (3-1)^2 m = 45m.$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι τη χρονική στιγμή t_3=3s και οι δυο μπάλες βρίσκονται στην ίδια θέση με συντεταγμένες (x,y) = (30m, 45m), οπότε συγκρούονται.

Σχόλιο.

Δόθηκε το ύψος του κτιρίου πάνω από 80m, οπότε βρίσκοντας y=45m, προφανώς οι μπάλες δεν έχουν φτάσει ακόμη στο έδαφος και η συνάντηση έγινε στον αέρα…

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης