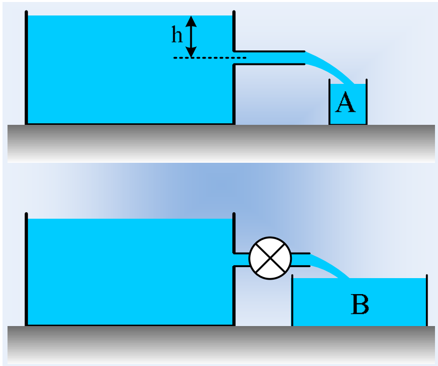
Μια αντλία, γιατί βιαζόμαστε…



Με τη βοήθεια ενός σωλήνα σταθερής διατομής, γεμίζουμε ένα δοχείο A με νερό όγκου 4L, από μια μεγάλη δεξαμενή, όπου το νερό εξέρχεται από βάθος h=0,2m, σε χρονικό διάστημα 10s.

i) Ποια η ταχύτητα εκροής του νερού και πόσο το εμβαδόν της διατομής της φλέβας τη στιγμή της εξόδου, την οποία θεωρούμε ίση με τη διατομή του οριζόντιου σωλήνα;

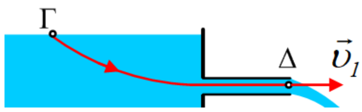
ii) Προκειμένου να γεμίσουμε ένα μεγαλύτερο δοχείο Β με νερό όγκου 40L, παρεμβάλουμε στον ίδιο σωλήνα, μια αντλία. Το αποτέλεσμα είναι το δοχείο Β να γεμίζει σε χρόνο 40s.

α) Να βρεθεί η νέα ταχύτητα εκροής του νερού.

β) Πόση είναι η ισχύς της αντλίας (ο ρυθμός με τον οποίο παρέχει ενέργεια στο νερό η αντλία);

Το νερό να θεωρηθεί ιδανικό ρευστό πυκνότητας ρ=1.000kg/m^3, καθώς και οι ροές μόνιμες και στρωτές και στις δύο περιπτώσεις, ενώ g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Εφαρμόζοντας το νόμο Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Γ στην επιφάνεια της δεξαμενής και του σημείου Δ, στο άκρο του σωλήνα, έχουμε:

$$P_\Gamma + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 = P_\Delta + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2$$

Και θεωρώντας αμελητέα την ταχύτητα του σημείου Γ, αφού έχουμε μεγάλη επιφάνεια της δεξαμενής, η οποία ουσιαστικά δεν κατέρχεται, ενώ $P_\Gamma = P_\Delta = P_{ατμ}$, οπότε:

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 0{,}2}m/s = 2m/s$$

Όσον αφορά την παροχή του σωλήνα έχουμε:

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A\cdot\upsilon_1 \rightarrow A = \frac{\Delta V}{\upsilon_1\cdot\Delta t} = \frac{4\cdot 10^{-3}m^3}{2\,{}^{m}\!/\!_{s}\cdot 10s} = 2\cdot 10^{-4}m^2 = 2cm^2$$

ii) Με την βοήθεια της αντλίας το νερό εκρέει με ταχύτητα υ_2, την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε με τη βοήθεια της παροχής, όπως και προηγουμένως:

$$\Pi = \frac{\Delta V_2}{\Delta t_2} = A\cdot\upsilon_2 \rightarrow \upsilon_2 = \frac{\Delta V_2}{A\cdot\Delta t_2}$$

α) Με αντικατάσταση έχουμε:

$$\upsilon_2 = \frac{\Delta V_2}{A \cdot \Delta t_2} = \frac{40 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 40} m/s = 5m/s$$

β) Έστω μια ποσότητα νερού μάζας m μεταφέρεται από την επιφάνεια της δεξαμενής στην έξοδο του ο-ριζόντιου σωλήνα, έχοντας ταχύτητα υ_2. Από τη διατήρηση της ενέργειας έχουμε:

$$E_\Gamma + W_\alpha = E_\Delta$$

Όπου E_Γ η μηχανική ενέργεια της μάζας αυτής ίση με τη δυναμική ενέργεια mgh, στο σημείο Γ, E_Δ η μηχανική της ενέργεια στο Δ, ίση με την κινητική ενέργεια ½ $m\upsilon^2$ και W_α το έργο που παράγει κατά τη μεταφορά της ποσότητας αυτής η αντλία ή διαφορετικά η ενέργεια την οποία μεταφέρει σε αυτήν την ποσότητα νερού η αντλία. Με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$mgh + W_a = \frac{1}{2} m\upsilon_2^2 \rightarrow W_a = \frac{1}{2} m\upsilon_2^2 - mgh \rightarrow$$

$$P_\alpha = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{W_\alpha}{\Delta t} = \frac{m\upsilon_2^2}{2\Delta t} - \frac{mgh}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad P_\alpha = \frac{\rho \Delta V \cdot \upsilon_2^2}{2\Delta t} - \frac{\rho \Delta V \cdot gh}{\Delta t}$$

Όμως $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \Pi = A \cdot \upsilon_2$ οπότε παίρνουμε:

$$P_\alpha = A\upsilon_2 \cdot \rho \left(\frac{1}{2} \upsilon_2^2 - gh \right) = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 1000 \left(\frac{1}{2} 5^2 - 10 \cdot 0{,}2 \right) W = 10{,}5W$$

dmargaris@gmail.com