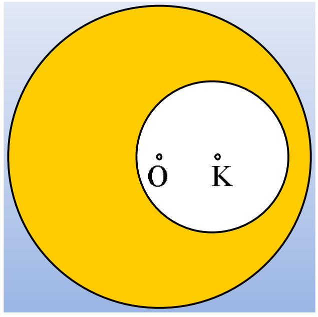
Μια κοίλη σφαίρα και η άνωση

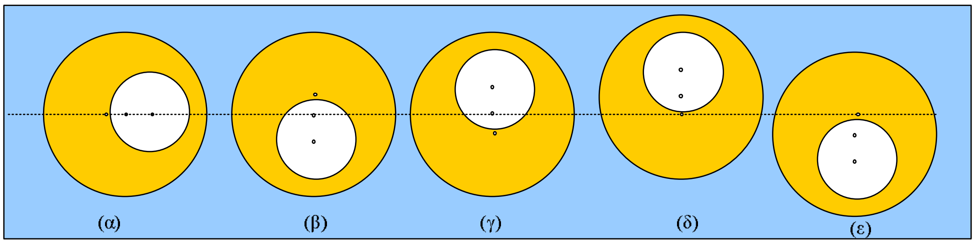


Από μια ομογενή σφαίρα ακτίνας R, έχουμε αφαιρέσει μια σφαιρική περιοχή ακτίνας r= ½ R, το κέντρο της οποίας K, απέχει d=14cm από το κέντρο O της σφαίρας.

i) Να βρεθεί το κέντρο μάζας Σ της κοίλης σφαίρας.

ii) Η κοίλη σφαίρα βυθίζεται σε ένα δοχείο με νερό σε ορισμένο βάθος και αφήνοντάς την, παρατηρούμε ότι παραμένει στη θέση της (δεν ανεβαίνει, ούτε κατεβαίνει). Να υπολογιστεί η πυκνότητα του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένη, αν η πυκνότητα του νερού είναι ρ=1g/cm^3.

iii) Η παραπάνω σφαίρα αφήνεται στη θέση που φαίνεται στο (α) σχήμα, σε ορισμένο βάθος μέσα στο δοχείο με το νερό. Θα ισορροπήσει; Αν όχι, ποιο από τα διπλανά σχήματα δείχνει την τελική θέση ισορροπίας της;



Απάντηση:

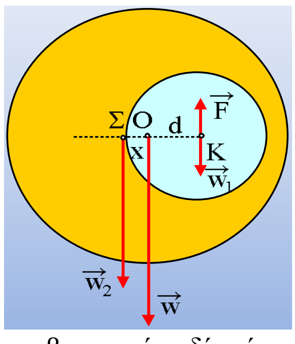
i) Ας θεωρήσουμε ότι η σφαιρική περιοχή κέντρου K, γεμίζεται με ένα υλικό της ίδιας πυκνότητας με το υλικό της κοίλης σφαίρας. Έτσι θα είχαμε μια πλήρη σφαίρα με κέντρο μάζας, το κέντρο της O και βάρος:

$$w= Mg=\rho gV=\frac{4}{3}\pi R^3\cdot\rho g \quad (1)$$

όπου ρ η πυκνότητα του υλικού.

Αντίστοιχα το βάρος της μικρής σφαίρας, θα ασκείτο στο κέντρο της K και θα ήταν:

$$w_1 = m_1 g=\rho gV_1 =\frac{4}{3}\pi r^3\cdot\rho g \quad (2)$$



Αν αντί να αφαιρέσουμε το υλικό περιεχόμενο της μικρής σφαίρας, ασκούσαμε στο K μια κατακόρυφη δύναμη, με φορά προς τα πάνω, μέτρου F=w$_1$, θα παίρναμε ουσιαστικά την κοίλη σφαίρα με βάρος

$$w_2=w-F$$

το σημείο εφαρμογής του οποίου, (το κέντρο βάρους Σ, και κέντρο μάζας, αφού το βαρυτικό πεδίο είναι ομογενές), θα βρίσκεται στην προέκταση της ΟΚ, προς την πλευρά του Ο, όπως στο σχήμα. Στην πραγματικότητα δηλαδή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το βάρος της κοίλης σφαίρας είναι η συνισταμένη του βάρους της συμπαγούς σφαίρας και της αντίθετης του βάρους που θα είχε η μικρή σφαίρα που αφαιρέθηκε, αν πληρούται από το ίδιο υλικό.

Αλλά τότε από το θεώρημα των ροπών (η ροπή της συνισταμένης είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των συνιστωσών) παίρνουμε:

$$\tau_{(\Sigma)w_2} = \tau_{(\Sigma)w} + \tau_{(\Sigma)F} \rightarrow$$

$$0=-w\cdot x+F\cdot(x+d) \rightarrow$$

$$x = \frac{Fd}{w-F} \qquad (3)$$

Αλλά με διαίρεση των (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{w}{w_1} = \frac{w}{F} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho g}{\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho g} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = 2^3 = 8 \rightarrow$$

$$x = \frac{Fd}{w-F} = \frac{Fd}{8F-F} = \frac{d}{7} = \frac{14cm}{7} = 2cm$$

Σημείωση:

Προφανώς θα μπορούσε να υποστηρίξει κάποιος ότι το βάρος w της συμπαγούς σφαίρας, είναι η συνισταμένη του βάρους w_1 της περιοχής της κοιλότητας και του βάρους w_2 της κοίλης σφαίρας και να γράψει:

$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \rightarrow \vec{w}_2 = \vec{w} + (-\vec{w}_1)$$

Καταλήγοντας στο ίδιο συμπέρασμα…

ii) Από τη στιγμή που η σφαίρα δεν μετακινείται κατακόρυφα η συνισταμένη δύναμη που δέχεται είναι μηδενική, συνεπώς το βάρος της w_2 εξουδετερώνεται από την άνωση:

$$w_2=A \rightarrow w-w_1=\rho gV$$

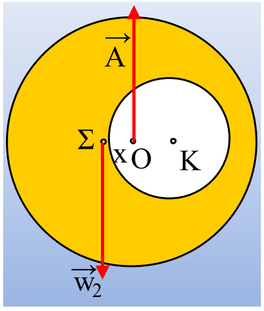
όπου $w_1=F= 1/8\ w$

οπότε

$$w - \frac{w}{8} = \rho g \frac{4}{3}\pi R^3 \rightarrow \frac{7}{8}\rho_1 g \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \rho g \frac{4}{3}\pi R^3 \rightarrow$$

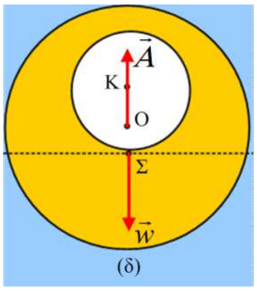
$$\frac{7}{8}\rho_1 = \rho \rightarrow \rho_1 = \frac{8}{7}\rho = 1{,}14 g/cm^3$$

iii) Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα είναι το βάρος της, στο κέντρο μάζας της Σ και η άνωση, στο **κέντρο ανώσεως,** το οποίο είναι το κέντρο βάρους του εκτοπιζόμενου υγρού, συνεπώς το κέντρο Ο της σφαίρας, όπως στο σχήμα:



Έτσι στην αρχική θέση μόλις αφεθεί η σφαίρα θα δεχτεί τις δυνάμεις, όπως στο διπλανό σχήμα.

Οι δυο αυτές δυνάμεις αποτελούν ζεύγος, το οποίο έχει ροπή μέτρου $\tau = w_2 \cdot x$, η οποία θα του προκαλέσει γωνιακή επιτάχυνση τείνοντας να το στρέψει αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.



(δ)

Έτσι ενώ το κέντρο μάζας Σ θα παραμείνει ακίνητο (αφού ΣF=0), η σφαίρα θα εκτελέσει μια φθίνουσα στροφική ταλάντωση (εξαιτίας της αντίστασης του νερού) και θα ισορροπήσει όπως στο σχήμα (δ), όπου το κέντρο μάζας Σ θα παραμείνει στην αρχική του θέση, ενώ τα σημεία O και K θα βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο με το Σ.

dmargaris@gmail.com