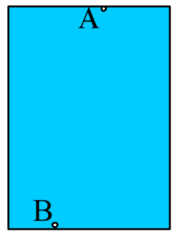
Οι πιέσεις σε κλειστό δοχείο

Έστω ένα κλειστό δοχείο, κυλινδρικού σχήματος, «πλήρες ύδατος». Με τη φράση αυτή εννοούμε ότι είναι γεμάτο με νερό, χωρίς να υπάρχει καθόλου αέρας στο εσωτερικό του. Στα επόμενα επίσης θα θεωρήσουμε ότι το νερό είναι ασυμπίεστο υγρό, ενώ όλες οι αναφορές μας γίνονται παρουσία αέρα στην επιφάνεια της Γης. Ας εξετάσουμε μερικές περιπτώσεις, ανιχνεύοντας το σωστό και το λάθος.



1) Πόση είναι η πίεση στο σημείο Α της πάνω έδρας του και πόση είναι η τιμή της πίεσης στο σημείο Β, στον πυθμένα του δοχείου;

Απάντηση:

Η απάντηση είναι ότι **ΔΕΝ** μπορούμε να ξέρουμε την τιμή της πίεσης σε κανένα σημείο στο εσωτερικό του δοχείου. Δεν ξέρουμε σε ποιες συνθήκες το δοχείο γέμισε νερό και πώς «κλείστηκε» το δοχείο.

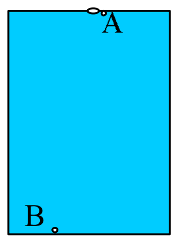
Αυτό που γνωρίζουμε είναι, ότι μεταξύ των σημείων Α και Β υπάρχει μια διαφορά πίεσης:

$$p_B - p_A = \rho g H$$

Ή με άλλα λόγια στο σημείο Β έχουμε μεγαλύτερη πίεση από το Α κατά ρgΗ, τη λεγόμενη «υδροστατική πίεση»

Αλλά τότε τι μπορούμε να κάνουμε αν θέλουμε να μιλήσουμε για την πίεση σε κάποιο σημείο;

Δεν έχουμε παρά να εξασφαλίσουμε μια γνωστή τιμή πίεσης σε κάποιο σημείο, το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για σημείο αναφοράς.



2) Στο παραπάνω δοχείο, το οποίο έχει ύψος Η=2m, ανοίγουμε μια τρύπα στο σημείο Α. Ποιες είναι τώρα οι τιμές της πίεσης στα σημεία Α και Β;

Απάντηση:

Από τη στιγμή που η άνω επιφάνεια του νερού έρχεται σε επαφή με την ατμόσφαιρα, όπου επικρατεί πίεση $p=p_{ατ}$, στο σημείο Α επικρατεί πίεση:

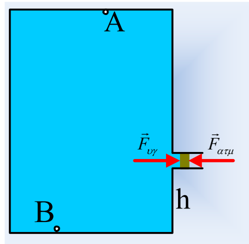
$$p_A = p_{ατ}$$

Αλλά τότε η πίεση στο πυθμένα (σημείο Β) έχει τιμή:

$$p_B = p_A + \rho g H \quad ή \quad p_B = p_{ατ} + \rho g H$$

«Λογικό» αποτέλεσμα και μάλλον αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιείται, χωρίς σκέψη και σε άλλες περιπτώσεις… Ας ανοίξουμε λοιπόν σε άλλο σημείο την τρύπα!

3) Στο παραπάνω δοχείο έχει προσαρμοσθεί ένας μικρός σωλήνας σε ύψος h=H/4 από τον πυθμένα του, ο οποίος κλείνεται με έμβολο, το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές.
   i) Πόση είναι τώρα η πίεση στα σημεία Α και Β;
   ii) Τι θα συμβεί αν αφαιρέσουμε το έμβολο; Θα χυθεί το νερό;



Απάντηση:

Το έμβολο με την επίδραση δύο δυνάμεων, της δύναμης από την ατμόσφαιρα $F_{ατμ}$ και μια δύναμη από το νερό $F_{υγ}$, ισορροπεί. Από την ισορροπία του παίρνουμε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{υγ}=F_{ατμ} \rightarrow$$

$$\frac{F_{υγ}}{A_1}=\frac{F_{ατμ}}{A_1} \rightarrow p_{\mathrm{E}}=p_{ατμ}$$

Όπου p_E η πίεση του υγρού στην αριστερή πλευρά του εμβόλου (θεωρώντας πολύ μικρό το εμβαδόν A_1 του εμβόλου, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι σε όλα τα σημεία επικρατεί η ίδια πίεση. Αν αυτό δεν συμβαίνει η παραπάνω τιμή αποδίδεται στο κέντρο του εμβόλου.

i) Έτσι για τις πιέσεις στα σημεία Α και Β έχουμε:

$$p_E-p_A=\rho g y \rightarrow p_A=p_E-\rho g(H-h) \rightarrow$$

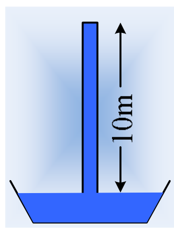
$$p_{\mathrm{A}}=p_{ατμ}-\frac{3}{4}\rho g H$$

Ενώ για το σημείο Β:

$$p_B-p_E=\rho g h \rightarrow p_B=p_E+\rho g h \rightarrow$$

$$p_{\mathrm{B}}=p_{ατμ}+\frac{1}{4}\rho g H$$

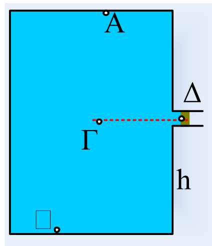
ii) Αν αφαιρέσουμε το έμβολο δεν πρόκειται να αλλάξει κάτι. Το νερό δεν θα χυθεί και οι πιέσεις είναι αυτές που υπολογίσαμε στο i) ερώτημα.
Η πίεση στο Δ θα είναι ξανά ίση με την ατμοσφαιρική, οπότε δεν υπάρχει κανένας λόγος να μεταβληθούν οι πιέσεις στα διάφορα σημεία του νερού.



Για να το πούμε με άλλα λόγια, η ατμόσφαιρα «πιέζει» το νερό και δεν το αφήνει να εξέλθει από την οπή.

Αν θυμηθούμε το πείραμα το Torricelli, θα μπορούσαμε να ανεβάσουμε νερό σε σωλήνα ύψους περίπου 10m (αν $g=10m/s^2$), αντεστραμμένο σε λεκάνη με νερό…

4) Και αν το έμβολο βρισκόταν σε ύψος h = ½ H ποιες οι τιμές της πίεσης στα σημεία Α και Β;



Απάντηση:

Με βάση όσα αναφέρθηκαν προηγούμενα $p_Γ=p_Δ=p_{ατμ}$, οπότε:

$$P_Γ-p_A=\rho gy \rightarrow p_A=p_Γ-\rho g(H-h) \rightarrow$$

$$p_Α = p_{ατμ} - \frac{1}{2}\rho gH$$

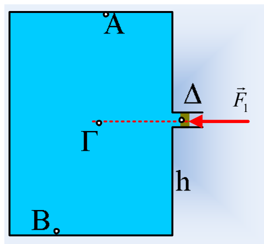
Ενώ για το σημείο Β:

$$p_B-p_Γ=\rho gh \rightarrow p_B=p_Γ+\rho gh \rightarrow$$

$$p_Β = p_{ατμ} + \frac{1}{2}\rho gH$$

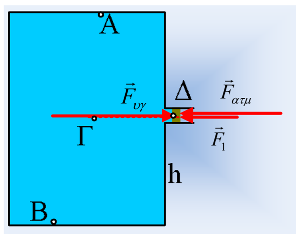
Αξίζει να γίνει η σύγκριση μεταξύ των τιμών των πιέσεων στα παραδείγματα 3) και 4). Έχουμε το ίδιο δοχείο, με άνοιγμα μιας τρύπας σε κάποιο σημείο, υπολογίζουμε τιμές πίεσης, οι οποίες όμως εξαρτώνται από το σημείο που το νερό έρχεται σε επαφή με την ατμόσφαιρα…

5) Και αν σπρώξουμε το έμβολο ασκώντας του κάποια δύναμη F_1, όπως στο σχήμα; Έστω η παραπάνω περίπτωση με το έμβολο σε ύψος h= ½ H.



Απάντηση:

Η κατάσταση είναι ακριβώς όμοια με την προηγούμενη. Η μόνη διαφορά είναι ότι τώρα η πίεση στο σημείο Δ, είναι αυξημένη αφού το έμβολο δέχεται, εκτός των δυνάμεων από ατμόσφαιρα και υγρό και την δύναμη F_1.



Από την ισορροπία του εμβόλου παίρνουμε:

$$ΣF=0 \rightarrow F_{υγ}=F_{ατμ}+F_1 \rightarrow$$

$$\frac{F_{υγ}}{A_1} = \frac{F_{ατμ}}{A_1} + \frac{F_1}{A_1} \rightarrow p_Δ = p_{ατμ} + \frac{F_1}{A_1}$$

Αλλά τότε για το σημείο Α θα έχουμε:

$$P_Γ-p_A=\rho gy \rightarrow p_A=p_Γ-\rho g(H-h) \rightarrow$$

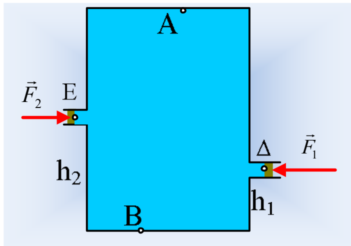
$$p_Α = p_{ατμ} + \frac{F_1}{A_1} - \frac{1}{2}\rho gH$$

Ενώ για το σημείο Β:

$$p_B-p_Γ=\rho gh \rightarrow p_B=p_Γ+\rho gh \rightarrow$$

$$p_Β = p_{ατμ} + \frac{F_1}{A_1} + \frac{1}{2}\rho gH$$

6) Και αν στο δοχείο έχουμε δύο έμβολα; Ποιο σημείο θα λάβουμε ως σημείο αναφοράς που θα καθορίσει τις τιμές της πίεσης; Έστω η κατάσταση, όπως στο διπλανό σχήμα, όπου τα δύο έμβολα βρίσκονται σε ύψη h_1= ¼ Η και h_2= ½ Η με το ίδιο εμβαδόν A_1 και μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές, ενώ δέχονται δυνάμεις F_1 και F_2.



i) Να βρείτε ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν οι δυο δυνάμεις F_1 και F_2.

ii) Να βρεθούν οι τιμές της πίεσης στα σημεία Α και Β.

Απάντηση:

Με βάση, όσα δείξαμε παραπάνω για τις πιέσεις στα σημεία Δ και Ε, έχουμε:

$$p_\Delta = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{F_1}{A_1} \quad \text{και} \quad p_E = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{F_2}{A_1}$$

i) Όμως για τις πιέσεις στα δύο έμβολα έχουμε ότι $p_\Delta - p_E = \rho g(h_2 - h_1)$, οπότε:

$$p_{\alpha\tau\mu} + \frac{F_1}{A_1} - p_{\alpha\tau\mu} - \frac{F_2}{A_1} = \rho g\left(\frac{1}{2}\text{H} - \frac{1}{4}\text{H}\right) \to$$

$$F_1 - F_2 = \frac{1}{4}\rho g H A_1$$

Αξίζει να προσεχθεί ότι στο έμβολο που είναι χαμηλότερα πρέπει να ασκήσουμε μεγαλύτερου μέτρου δύναμη, για να εξασφαλιστεί η ισορροπία. Δεν επιτυγχάνεται με άλλα λόγια η εικόνα του σχήματος με τυχαίες δυνάμεις στα έμβολα…

ii) Για να υπολογίσουμε τώρα τις τιμές της πίεσης στα σημεία Α και Β, μπορούμε να πάρουμε ως σημείο αναφοράς, είτε την πίεση στο Δ, είτε την πίεση στο Ε. Ας το δούμε:

A) Έστω ότι παίρνουμε ως σημείο αναφοράς το σημείο Δ.

Για το σημείο Α θα έχουμε:

$$P_\Delta - p_A = \rho g y \to p_A = p_\Delta - \rho g(H - h_1) \to$$

$$p_A = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{F_1}{A_1} - \frac{3}{4}\rho g H \quad (1)$$

Ενώ για το σημείο Β:

$$p_B - p_\Delta = \rho g h \to p_B = p_\Delta + \rho g h_1 \to$$

$$p_B = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{F_1}{A_1} + \frac{1}{4}\rho g H \quad (2)$$

B) Έστω ότι παίρνουμε ως σημείο αναφοράς το σημείο Ε.

Για το σημείο Α θα έχουμε:

$$P_E - p_A = \rho g y \to p_A = p_E - \rho g(H - h_2) \to$$

$$p_{\rm A} = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{F_2}{A_1} - \frac{1}{2}\rho g H \quad (1^{\alpha})$$

Ενώ για το σημείο Β:

$$p_B\text{-}p_E=\rho gh \rightarrow p_B=p_E+\rho gh_2 \rightarrow$$

$$p_{\rm B} = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{F_2}{A_1} + \frac{1}{2}\rho g H \quad (2^{\alpha})$$

Βρήκαμε το ίδιο ή διαφορετικό αποτέλεσμα; Δεν έχουμε παρά να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση μεταξύ των δυνάμεων F_1 και F_2 του i) ερωτήματος. Από την (1) παίρνουμε:

$$(1) \rightarrow p_{\rm A} = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{F_1}{A_1} - \frac{3}{4}\rho g H = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{F_2 + \frac{1}{4}\rho g H A_1}{A_1} - \frac{3}{4}\rho g H \rightarrow$$

$$p_{\rm A} = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{F_2}{A_1} + \frac{1}{4}\rho g H - \frac{3}{4}\rho g H = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{F_2}{A_1} - \frac{1}{2}\rho g H \; (1^{\alpha})$$

Συμπέρασμα: Δεν έχει καμιά σημασία αν ξεκινήσουμε από το ένα έμβολο ή από το άλλο. Το αποτέλεσμα που θα βρούμε θα είναι το ίδιο.

Ερώτημα: Και τι θα συμβεί, αν τώρα βγάλουμε το ένα έμβολο, π.χ. το E_2;

Προφανώς τότε η πίεση στο Ε θα γίνει με την ατμοσφαιρική, ενώ στο Δ, θα έχουμε $p_{\Delta} = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{F_1}{A_1}$.

- Αν $\frac{F_1}{A_1} > \rho g \frac{1}{4} \mathrm{H}$, τότε το νερό θα εξέλθει από το δοχείο από την τρύπα στο Ε (και το πρώτο έμβολο θα κινηθεί προς τα αριστερά).
- Αν $\frac{F_1}{A_1} = \rho g \frac{1}{4} \mathrm{H}$ δεν θα χαλάσει η ισορροπία και δεν θα χυθεί το νερό.
- Αν $\frac{F_1}{A_1} < \rho g \frac{1}{4} \mathrm{H}$ το έμβολο στο Δ θα κινηθεί προς τα δεξιά και αέρας θα εισχωρήσει στο δοχείο…

Σχόλιο:

Και αν στο τελευταίο πρόβλημα θέλαμε να μιλήσουμε χρησιμοποιώντας ορολογία «εξωτερική- υδροστατική» πίεση;

Καλύτερα θα ήταν να **μην το κάναμε**… Η ορολογία εξωτερική-υδροστατική πίεση, ενώ δεν προσφέρει τίποτα ουσιαστικό στη μελέτη μας, δημιουργεί παρερμηνείες και οδηγεί σε λάθη.

Αλλά αν κάποιος επιμένει, εξωτερική πίεση θα πρέπει να ονομασθεί η μεγαλύτερη από αυτές που υπολογίστηκαν για τις θέσεις των δύο εμβόλων. Ποια είναι αυτή; Μα, με βάση το ερώτημα i) η πίεση στο έμβολο που βρίσκεται πλησιέστερα στο πυθμένα του δοχείου.

Έτσι θα μπορούσε κάποιος να υποστηρίξει ότι εξωτερικά επιβάλλεται πίεση:

$$p_\Delta = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{F_1}{A_1}$$

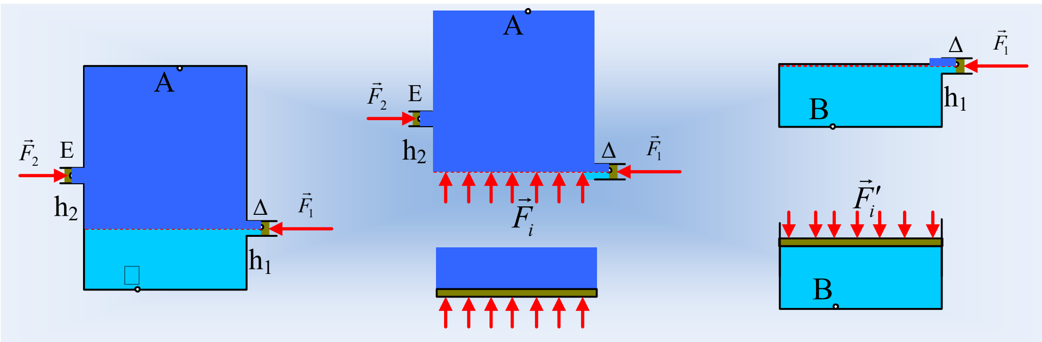
με αποτέλεσμα στο σημείο Β η πίεση να είναι ίση με:

$$p_B = p_{\varepsilon\xi} + p_{\upsilon\delta\rho} = \left(p_{\alpha\tau\mu} + \frac{F_1}{A_1}\right) + \frac{1}{4}\rho g H$$

Όπου σαν υδροστατική πίεση υπολογίζουμε αυτή που οφείλεται στο βάρος του νερού σε ύψος ¼ Η, δηλαδή την κατακόρυφη απόσταση μεταξύ του εμβόλου, που επιβάλει την εξωτερική πίεση και του πυθμένα.

Γιατί όμως να είναι έτσι αφού πάνω από το σημείο Β υπάρχει νερό σε ύψος Η;

Η ύπαρξη του εμβόλου δημιουργεί στο οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το Δ (κόκκινη διακεκομμένη γραμμή) μια «εξωτερική πίεση» $p_{\varepsilon\xi} = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{F_1}{A_1}$.



Θα μπορούσαμε λοιπόν να εξετάσουμε, ποιο είναι το αποτέλεσμα της δημιουργίας αυτής της πίεσης.

Η ποσότητα του υγρού, πάνω από αυτό το επίπεδο (σκούρο χρώμα στο σχήμα) δέχεται δυνάμεις κατακόρυφες F_i, η συνισταμένη των οποίων εξασφαλίζει την ισορροπία της ποσότητας αυτής και την μη πτώση της (μεσαίο σχήμα). Μπορείτε να φανταστείτε ότι η συνισταμένη εξασφαλίζεται με την βοήθεια ενός οριζοντίου εμβόλου που «κλείνει» και απομονώνει την ποσότητα αυτή του υγρού.

Η ποσότητα του υγρού, κάτω από το επίπεδο (ανοικτό χρώμα), είναι σαν να κλείνεται από ένα έμβολο, το οποίο ασκώντας δυνάμεις F_i' δημιουργεί εξωτερική πίεση $p_{\varepsilon\xi} = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{F_1}{A_1}$ (δεξιό σχήμα). Αν επικεντρωθούμε στο τελευταίο σχήμα, πόση είναι η πίεση στο σημείο Β, στον πυθμένα του δοχείου;

$$p_B = p_{\varepsilon\xi} + p_{\upsilon\delta\rho} = \left(p_{\alpha\tau\mu} + \frac{F_1}{A_1}\right) + \frac{1}{4}\rho g H$$

Όπου πλέον ως «υδροστατική πίεση» πρέπει να θεωρηθεί ο προσθετέος $\frac{1}{4}\rho g H$ ο οποίος την περιορίζει σε ύψος ¼ Η και όχι σε όλο το ύψος του υγρού του δοχείου.

dmargaris@gmail.com