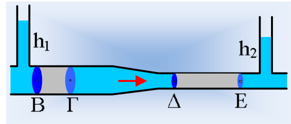
Η ροή σε έναν οριζόντιο σωλήνα.



Στο διπλανό σχήμα, βλέπετε ένα οριζόντιο σωλήνα εντός του οποίου έχουμε μια μόνιμη ροή υγρού, το οποίο θεωρούμε ως ιδανικό ρευστό. Οι διατομές στα σημεία Β και Δ είναι $A_1=6cm^2$ και $A_2=2cm^2$ αντίστοιχα, ενώ η ταχύτητα ροής στο σημείο Β είναι ίση με $υ_1=0{,}1m/s$. Στον κατακόρυφο σωλήνα που έχει προσαρμοσθεί στο φαρδύ σωλήνα, το υγρό έχει ανέβει κατά $h_1=20cm$.

i) Να βρεθεί η ταχύτητα ροής του υγρού στο λεπτό μέρος του σωλήνα.

ii) Να υπολογισθεί η μεταβολή της κινητικής ενέργειας μιας ποσότητας υγρού, μάζας m= 0,1kg μεταξύ των σημείων Β και Γ, κατά τη μετάβασή της στον λεπτό σωλήνα (μεταξύ των διατομών Δ και Ε).

iii) Η παραπάνω μεταβολή της κινητικής ενέργειας, οφείλεται σε κάποιο έργο. Ποιο είναι το αντίστοιχο έργο που παράγεται πάνω στην παραπάνω ποσότητα υγρού; Το έργο αυτό, συνδέεται με τις πιέσεις στο εσωτερικό του σωλήνα;

iv) Να υπολογιστεί η άνοδος του υγρού h_2 στον κατακόρυφο σωλήνα που έχει προσαρμοσθεί στον λεπτό σωλήνα;

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

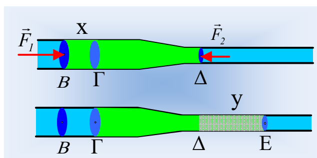
i) Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των διατομών Β και Δ παίρνουμε:

$$A_1υ_1=A_2υ_2 \rightarrow υ_2 = υ_1\frac{A_1}{A_2} = 0{,}1\frac{6}{2}m/s = 0{,}3m/s$$

ii) Αφού έχουμε αύξηση της ταχύτητας ροής, έχουμε αύξηση της κινητική ενέργειας, κάθε μάζας υγρού κατά την μετάβασή της από τον φαρδύ στο λεπτό σωλήνα:

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mυ_2^2 - \frac{1}{2}mυ_1^2 = \frac{1}{2}m\left(υ_2^2 - υ_1^2\right) \rightarrow$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\left(υ_2^2 - υ_1^2\right) = \frac{1}{2}0{,}1\left(0{,}3^2 - 0{,}1^2\right)J = 0{,}004J$$



iii) Έστω ότι η παραπάνω μάζα υγρού περιέχεται μεταξύ των διατομών Β και Γ του σωλήνα. Ας πάρουμε την ποσότητα του υγρού (πολύ μεγαλύτερης μάζας Μ από τη μάζα m που μας ενδιαφέρει) μεταξύ των διατομών Β και Δ. Η ποσότητα αυτή, δέχεται από τις διπλανές ποσότητες υγρού τις δυνάμεις F_1 και F_2, όπως στο σχήμα. Μόλις η διατομή Β, φτάσει στο Γ, η παραπάνω ποσότητα του νερού, θα έχει φτάσει στη διατομή Ε, όπου $V_{ΒΓ}=V_{ΔΕ}$ ή

$$A_1 \cdot x = A_2 \cdot y$$

Έτσι το έργο που στο μεταξύ θα έχει παραχθεί πάνω στην ποσότητα του υγρού μάζας Μ θα είναι:

$$W=F_1 \cdot x-F_2 \cdot y$$

Αλλά η κινητική ενέργεια του νερού μεταξύ των διατομών Γ και Δ δεν άλλαξε, οπότε το έργο αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ισούται με την αύξηση της κινητικής ενέργειας της μάζας m, που αρχικά βρίσκεται μεταξύ Β και Γ και τελικά (μια άλλη, αλλά ίση μάζα m) βρίσκεται μεταξύ Δ και Ε, με ελαφρύ γκρι χρώμα στο σχήμα. Δηλαδή έχουμε:

$$\Delta K=\frac{1}{2}m\left(\upsilon_2^2-\upsilon_1^2\right)=F_1\cdot x-F_2\cdot y \quad (1)$$

Βέβαια οι παραπάνω δυνάμεις συνδέονται με τις αντίστοιχες πιέσεις στους δυο σωλήνες, αφού:

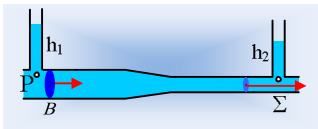
$$F_1=p_1 \cdot A_1 \text{ και } F_2=p_2 \cdot A_2.$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$W=F_1 \cdot x-F_2 \cdot y=p_1 \cdot A_1 \cdot x-p_2 \cdot A_2 \cdot y=(p_1-p_2)V \quad (2)$$

Όπου V ο όγκος του υγρού μάζας m.

iv) Η πίεση p_1, στο σημείο Ρ, στο κάτω μέρος του αριστερού κατακόρυφου σωλήνα, έχει τιμή $p_1=p_{ατμ}+\rho g h_1$, ενώ η αντίστοιχη πίεση στο κάτω άκρο του δεξιού σωλήνα, στο σημείο Σ έχει τιμή $p_2=p_{ατμ}+\rho g h_2$.



Επειδή οι διατομές του σωλήνα είναι μικρές, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι σε όλα τα σημεία της διατομής στο Β έχουμε την ίδια τιμή πίεσης p_1 και το ίδιο θα ισχύει και για τα σημεία της διατομής στο λεπτό μέρος του σωλήνα, Δ ή Ε.

Αλλά τότε από (1) και (2) παίρνουμε:

$$\Delta K=W \rightarrow \Delta K=\left(p_1-p_2\right)V \rightarrow$$

$$p_2=p_1-\frac{\Delta K}{V}=p_1-\frac{\Delta K}{m}\rho \rightarrow \; p_{ατ}+\rho g h_2=p_{ατ}+\rho g h_1-\frac{\Delta K}{m}\rho \rightarrow$$

$$h_2=h_1-\frac{\Delta K}{mg}=0{,}2m-\frac{0{,}004}{0{,}1\cdot 10}m=0{,}196m=19{,}6cm$$

Σχόλιο:

Προφανώς η παραπάνω πορεία δεν ήταν τίποτα άλλο παρά η εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli:

$$p_1+\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2=p_2+\frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$$

Άλλη μια προσπάθεια να μην μείνει μια ξερή εξίσωση, αλλά να διαπιστωθεί η ουσία της…

dmargaris@gmail.com