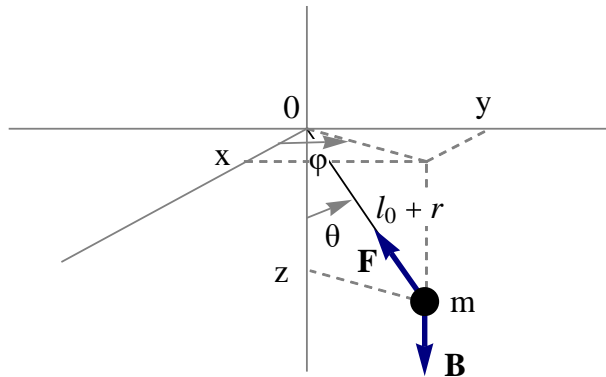


# Το ελαστικό κωνικό εκκρεμές

## 1. Εξισώσεις Euler-Lagrange



Το ελαστικό κωνικό εκκρεμές αποτελείται από ένα ελατήριο με σταθερά επαναφοράς  $k$ , το οποίο αναρτάται από ένα σταθερό σημείο, ενώ στο άλλο άκρο του προσαρμόζεται ένα υλικό σημείο μάζας  $m$ . Έστω ότι το ελεύθερο μήκος του ελατηρίου ισούται με  $l_0$  και ότι  $l$  είναι το μήκος του ελατηρίου σε μία τυχαία κατάσταση του συστήματος, έτσι ώστε  $r = l - l_0$  να είναι η παραμόρφωσή του. Υποθέτουμε ότι το όλο σύστημα βρίσκεται μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο έντασης  $\vec{g} = -g\hat{z}$ , στην φορά και την διεύθυνση του αρνητικού άξονα  $z$  (δες σχήμα).

Υιοθετούμε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων  $(x, y, z)$  με αρχή το ακίνητο σημείο του νήματος και με οριζόντιο το επίπεδο  $xOy$ . Τότε στο αδρανειακό καρτεσιανό σύστημα αναφοράς και στις σφαιρικές συντεταγμένες η θέση του υλικού σημείου σε ένα τυχαίο σημείο του χώρου προσδιορίζεται από τις γενικευμένες συντεταγμένες  $l = l_0 + r$ ,  $\varphi$  και  $\theta$ , μέσω των μετασχηματισμών,

$$x = (l_0 + r) \cos(\varphi) \sin(\theta) \quad (1\alpha), \quad y = (l_0 + r) \sin(\varphi) \sin(\theta) \quad (1\beta), \quad z = (l_0 + r) \cos(\theta) \quad (1\gamma),$$

όπου  $l = l_0 + r$  το μήκος του νήματος,  $\varphi$  η αζιμουθιακή (μετρημένη από τον άξονα  $x$ ) και  $\theta$  η πολική γωνία (μετρημένη από τον αρνητικό άξονα  $z$ ). Στην περίπτωση αυτή το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου σε ένα τυχαίο σημείο του χώρου ισούται με  $\vec{R} = R\hat{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$  και η ταχύτητα του υλικού σημείου ισούται με

$$v^2 = \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}} = \dot{r}^2 + (l_0 + r)^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\varphi}^2) \quad (2),$$

όπου

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt}, \quad \dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt}, \quad \dot{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{dt}.$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι στο οριζόντιο επίπεδο  $xOy$  η βαρυτική δυναμική ενέργεια ισούται με το μηδέν, τότε η κινητική και η δυναμική ενέργεια του υλικού σημείου δίνονται από τις σχέσεις

$$K = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (l_0 + r)^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2)] \quad (3), \quad U = -mg(l_0 + r)\cos(\theta) + \frac{1}{2}kr^2 \quad (4).$$

Η δε συνάρτηση Lagrange του υλικού σημείου ισούται με  $L = K - U$  ή

$$L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}, \phi) = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (l_0 + r)^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2)] + mg(l_0 + r)\cos(\theta) - \frac{1}{2}kr^2 \quad (5).$$

Κατά πρώτον παρατηρούμε ότι η συνάρτηση Lagrange δεν εξαρτάται από την αζιμουθιακή γωνία  $\phi$ , συνεπώς η ποσότητα

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m(l_0 + r)^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi} \quad (6)$$

είναι μία σταθερά της κίνησης, η οποία ταυτίζεται με το μέτρο της στροφορμής του υλικού σημείου  $\vec{J} = J\hat{z}$ . Συνεπώς η γωνιακή ταχύτητα  $\dot{\phi}$  ισούται με

$$\dot{\phi} = \frac{J}{m(l_0 + r)^2 \sin^2(\theta)} \quad (7).$$

Κατά δεύτερον παρατηρούμε ότι η συνάρτηση Lagrange δεν έχει άμεση και σαφή εξάρτηση από τον χρόνο, συνεπώς το σύστημα είναι συντηρητικό και η ποσότητα

$$E = K + U \Rightarrow E = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (l_0 + r)^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2)] - mg(l_0 + r)\cos(\theta) + \frac{1}{2}kr^2 \quad (8),$$

η οποία ταυτίζεται με την μηχανική ενέργεια, είναι μία δεύτερη σταθερά της κίνησης.

Όσον αφορά στις διαφορικές εξισώσεις της κίνησης, αυτές δίνονται, σύμφωνα με τη αρχή ελάχιστης δράσης, από τις εξισώσεις Euler –Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow m(l_0 + r)[-g \sin(\theta) - 2\dot{r}\dot{\theta} + (l_0 + r)(\cos(\theta) \sin(\theta)\dot{\phi}^2 - \ddot{\theta})] = 0 \quad (9)$$

και

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0 \Rightarrow mg \cos(\theta) - kr + m(l_0 + r)[\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2] - m\ddot{r} = 0 \quad (10).$$

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (7), (8), (9) και (10), μαζί με τις εκάστοτε αρχικές συνθήκες προσδιορίζουν πλήρως την δυναμική εξέλιξη του συστήματος. Το παραπάνω σύστημα απλοποιείται αν θέσουμε  $\omega_0^2 = k/m$  και αντικαθιστώντας την (7) στις (8), (9), και (10), οπότε κατά σειρά προκύπτει ότι

$$m(l_0 + r) \left[ \frac{J^2 \cot(\theta)}{m^2(l_0 + r)^3 \sin^2(\theta)} - g \sin(\theta) - 2\dot{r}\dot{\theta} - (l_0 + r)\ddot{\theta} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} - \frac{J^2 \cos(\theta)}{m^2(l_0 + r)^4 \sin^3(\theta)} + \frac{g}{l_0 + r} \sin(\theta) + \frac{2}{l_0 + r} \dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad (11),$$

$$m g \cos(\theta) - k r + m(l_0 + r) \left( \frac{J^2}{m^2(l_0 + r)^4 \sin^2(\theta)} + \dot{\theta}^2 \right) - m \dot{r} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\dot{r} + \omega_0^2 r - g \cos(\theta) - \frac{J^2}{m^2(l_0 + r)^3 \sin^2(\theta)} - (l_0 + r)\dot{\theta}^2 = 0} \quad (12)$$

και

$$E = \frac{1}{2} k r^2 - m g (l_0 + r) \cos(\theta) + \frac{1}{2} m \left[ \dot{r}^2 + (l_0 + r)^2 \left( \frac{J^2}{m^2(l_0 + r)^4 \sin^2(\theta)} + \dot{\theta}^2 \right) \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 + \frac{1}{2} m (l_0 + r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{J^2}{2m(l_0 + r)^2 \sin^2(\theta)} - m g (l_0 + r) \cos(\theta)} \quad (13).$$

Τώρα η χρονική εξέλιξη του συστήματος προσδιορίζεται πλήρως μέσω των διαφορικών εξισώσεων (7), (11), (12), (13) και των εκάστοτε αρχικών συνθηκών, αν γνωρίζουμε την σταθερή στροφορμή  $J$  και την μηχανική ενέργεια  $E$  του συστήματος.

## 2. Λύση για σταθερή παραμόρφωση και πολική γωνία

Έστω ότι το υλικό σημείο έχει αποκτήσει την κατάλληλη στροφορμή και κινητική ενέργεια, έτσι ώστε να περιστρέφεται μόνιμα σε ένα σταθερό, παράλληλο του  $xOy$ , επίπεδο με σταθερή πολική γωνία  $\theta = \theta_0$  και σταθερή παραμόρφωση  $r = r_0$ . Τότε μέσω της εξίσωσης (11) προκύπτει η σταθερή στροφορμή συναρτήσει της γωνίας  $\theta_0$ , ως

$$-\frac{J^2 \cos(\theta_0)}{m^2(l_0 + r_0)^3 \sin^3(\theta_0)} + g \sin(\theta_0) = 0 \Rightarrow J^2 = m^2 g (l_0 + r_0)^3 \frac{\sin^4(\theta_0)}{\cos(\theta_0)} \quad (14),$$

και μέσω της εξίσωσης (12) προκύπτει η σταθερή παραμόρφωση του ελατηρίου συναρτήσει της γωνίας  $\theta_0$ , ως

$$(12) \rightarrow \omega_0^2 r_0 - g \cos(\theta_0) - \frac{J^2}{m^2(l_0 + r_0)^3 \sin^2(\theta_0)} = 0 \Rightarrow \omega_0^2 r_0 - \frac{g}{\cos(\theta_0)} = 0 \Rightarrow$$

$$r_0 = \frac{g}{\omega_0^2 \cos(\theta_0)} \quad (15).$$

Η δε σταθερή μηχανική ενέργεια (13) συναρτήσει της γωνίας  $\theta_0$  λαμβάνει, μέσω των αποτελεσμάτων (14) και (15), την μορφή

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r_0^2 + \frac{J^2}{2m(l_0 + r_0)^2 \sin^2(\theta_0)} - m g (l_0 + r_0) \cos(\theta_0) \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} m \frac{g^2}{\omega_0^2 \cos^2(\theta_0)} + m g \left( l_0 + \frac{g}{\omega_0^2 \cos(\theta_0)} \right) \left( \frac{1 \sin^2(\theta_0)}{2 \cos(\theta_0)} - \cos(\theta_0) \right) \quad (16).$$

Τέλος η γωνιακή ταχύτητα  $\dot{\phi}$  (7) συναρτήσει της επίσης σταθερής πολικής γωνίας γράφεται, μέσω των αποτελεσμάτων (14) και (15) στην μορφή,

$$\dot{\varphi} = \frac{J}{m(l_0 + r_0)^2 \sin^2(\theta_0)} = \sqrt{\frac{g}{(l_0 + r_0) \cos(\theta_0)}} \Rightarrow \dot{\varphi} = \omega_0 \sqrt{\frac{g}{l_0 \omega_0^2 \cos(\theta_0) + g}} \quad (17).$$

Παρατηρούμε ότι αν  $\theta_0 = 0$ , τότε

$$r_0 = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{mg}{k} \quad (18\alpha), \quad J = 0 \quad (18\beta), \quad \dot{\varphi} = 0 \quad (18\gamma),$$

$$E = \frac{1}{2} m \frac{g^2}{\omega_0^2} - mg \left( l_0 + \frac{g}{\omega_0^2} \right) = \frac{1}{2} k r_0^2 - mg(l_0 + r_0) \quad (18\delta).$$

Συνεπώς προκύπτει ότι αν η πολική γωνία ισούται με το μηδέν, τότε το σύστημα ισορροπεί στην κατακόρυφη θέση με την γνωστή παραμόρφωση ελατηρίου  $mg/k$  και η στροφορμή του μηδενίζεται, ενώ η μηχανική του ενέργεια ταυτίζεται με την συνολική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου και του βαρυντικού πεδίου.

Αν όμως η πολική γωνία τείνει στην τιμή  $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ , τότε προκύπτει ότι

$$J \rightarrow \infty \quad (19\alpha), \quad r_0 \rightarrow \infty \quad (19\beta), \quad E \rightarrow \infty \quad (19\gamma), \quad \dot{\varphi} = \omega_0 \quad (19\delta).$$

Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι η στροφορμή, η ενέργεια του συστήματος και η παραμόρφωση του ελατηρίου απειρίζονται, ενώ η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής πέριξ του κατακόρυφου άξονα ισούται με την γωνιακή συχνότητα της κατακόρυφης απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελούσε το σύστημα στην άκρη του ελατηρίου, πέριξ της θέσεως ισορροπίας του  $mg/k$ . Η τελευταία αυτή λύση, της κατακόρυφης ταλάντωσης, προκύπτει αν στις εξισώσεις Euler – Lagrange θέσουμε  $\theta = \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ , οπότε

$$(6) \rightarrow J = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = 0 \quad (20\alpha),$$

$$(10) \rightarrow mg - kr - m\ddot{r} = 0 \Rightarrow \ddot{r} + \frac{k}{m}r = g \Rightarrow r(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{mg}{k} \quad (20\alpha).$$

$$(13) \rightarrow E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 - mg(l_0 + r) = \frac{1}{2} k C^2 - mg \left( l_0 + \frac{mg}{k} \right) \quad (20\gamma).$$

Οι απειρισμοί στα αποτελέσματα (19 $\alpha, \beta, \gamma$ ) παραπέμπουν σε κάποιο είδος συντονισμού. Ο συντονισμός αυτός διαφέρει από τον συντονισμό των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων εφ' όσον κατά πρώτον στο σύστημα δεν υπάρχει εξωτερικός διεγέρτης και κατά δεύτερον στην κατάσταση συντονισμού, η ενέργεια του συστήματος αλλά και η στροφορμή του πρέπει να παραμένουν σταθερές, εφ' όσον το σύστημα είναι συντηρητικό και απομονωμένο. Το λογικό λοιπόν συμπέρασμα είναι ότι οι εξισώσεις (14) έως (16) αδυνατούν να περιγράψουν σωστά, στην περίπτωση αυτή, το σύστημα. Ο δε συντονισμός πρέπει να αναζητηθεί μεταξύ των παραμέτρων που περιγράφουν στην κίνηση του υλικού σημείου και για τον λόγο αυτό καλείται *παραμετρικός συντονισμός*.

Στην συνέχεια θα αναζητήσουμε γενικότερες λύσεις των εξισώσεων Euler – Lagrange και θα δείξουμε ότι ο παραμετρικός συντονισμός οφείλεται στον συντονισμό των συχνοτήτων των απλών ταλαντώσεων της πολικής γωνίας  $\theta$  και της παραμόρφωσης του ελατηρίου  $r$ .

### 3. Λύσεις ταλαντώσεων μικρού πλάτους των γενικευμένων συντεταγμένων

Ας υποθέσουμε ότι η γενικευμένη συντεταγμένη  $\theta$ , εκτελεί ταλαντώσεις μικρού πλάτους περίξ μιας σταθερής πολικής γωνίας  $\theta_0$ , έτσι ώστε  $\theta = \theta_0 + \delta\theta$ . Επίσης υποθέτουμε ότι η γενικευμένη συντεταγμένη της παραμόρφωσης του ελατηρίου  $r$  λαμβάνει τιμές πολύ μικρότερες του ελευθέρου μήκους του ελατηρίου, ήτοι  $r \ll l_0$ . Στην συνέχεια αντικαθιστούμε την πολική γωνία  $\theta = \theta_0 + \delta\theta$  στην διαφορική εξίσωση (11) και αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor, αρχικά ως προς  $\delta\theta \rightarrow 0$  και στην συνέχεια ως προς  $r/l_0 \rightarrow 0$ . Τότε προσεγγίζοντας έως όρους πρώτης τάξης ως προς τις διαταραχές  $r$ ,  $\delta\theta$ ,  $\delta\dot{\theta}$  και μηδενίζοντας όρους της μορφής  $r/l_0^n$  για  $n \geq 2$ , προκύπτει, μετά από πολύ άλγεβρα, ότι

$$\delta\ddot{\theta} + \frac{m^2 g l_0^3 \cos(\theta_0) + J^2 \frac{[2 + \cos(2\theta_0)]}{\sin^4(\theta_0)}}{m^2 l_0^4} \delta\theta = \frac{J^2 \cot(\theta_0)}{m^2 l_0^4 \sin^2(\theta_0)} - \frac{g \sin(\theta_0)}{l_0} \quad (21).$$

Θέτουμε

$$\omega_\theta^2(\theta_0) = \frac{m^2 g l_0^3 \cos(\theta_0) + J^2 \frac{[2 + \cos(2\theta_0)]}{\sin^4(\theta_0)}}{m^2 l_0^4} \quad (22), \quad \beta(\theta_0) = \frac{J^2 \cot(\theta_0)}{m^2 l_0^4 \sin^2(\theta_0)} - \frac{g \sin(\theta_0)}{l_0} \quad (23),$$

όπου  $\omega_\theta(\theta_0)$  η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης μικρού πλάτους της πολικής γωνίας και  $\beta(\theta_0)$  μία συνάρτηση της σταθερής πολικής γωνίας με διαστάσεις  $\text{sec}^{-2}$ . Βάσει των παραπάνω η διαφορική εξίσωση της χρονικής εξέλιξης της διαταραχής της πολικής γωνίας (21) λαμβάνει την μορφή

$$\delta\ddot{\theta} + \omega_\theta^2(\theta_0) \delta\theta = \beta(\theta_0) \quad (24)$$

και έχει λύσεις της μορφής

$$\delta\theta(t) = \frac{\beta(\theta_0)}{\omega_\theta^2(\theta_0)} + B \sin(\omega_\theta t + \xi) \quad (25),$$

όπου  $B$  και  $\xi$  σταθερές οι οποίες προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες.

Στην συνέχεια προσεγγίζω παρόμοια στην (12) και μετά από επίσης κοπιώδη άλγεβρα (να 'ναι καλά το Mathematica) προκύπτει ότι

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = g \cos(\theta_0) + \frac{J^2}{m^2 l_0^3 \sin^2(\theta_0)} + \left( \frac{2J^2 \cos(\theta_0)}{m^2 l_0^3 \sin^2(\theta_0)} + g \sin(\theta_0) \right) \delta\theta \quad (26).$$

Θέτουμε

$$\gamma(\theta_0) = g \cos(\theta_0) + \frac{J^2}{m^2 l_0^3 \sin^2(\theta_0)} \quad (27), \quad a(\theta_0) = \frac{2J^2 \cos(\theta_0)}{m^2 l_0^3 \sin^2(\theta_0)} + g \sin(\theta_0) \quad (28),$$

όπου  $\gamma$  και  $a$  συναρτήσεις της σταθερής πολικής γωνίας  $\theta_0$  με διαστάσεις επιτάχυνσης, οπότε η διαφορική εξίσωση της παραμόρφωσης του ελατηρίου απλοποιείται στην μορφή

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = \gamma(\theta_0) + a(\theta_0)\delta\theta \quad (29),$$

με λύσεις της μορφής

$$r(t) = \frac{\gamma(\theta_0)\omega_\theta^2(\theta_0) + \beta(\theta_0)a(\theta_0)}{\omega_0^2\omega_\theta^2(\theta_0)} + B \frac{a(\theta_0)}{\omega_0^2 - \omega_\theta^2(\theta_0)} \sin(\omega_\theta t + \xi) + C \sin(\omega_0 t + \psi) \quad (29),$$

όπου  $C$  και  $\psi$  σταθερές οι οποίες εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες.

Τέλος η γωνιακή ταχύτητα του υλικού σημείου ως προς τον άξονα  $z$  της σχέσης (7), λαμβάνει με τις ίδιες προσεγγίσεις, την μορφή

$$\dot{\phi} = \frac{J}{m(l_0 + r)^2 \sin^2(\theta)} \approx \frac{J}{ml_0^2 \sin^2(\theta_0)} - \frac{2J \cot(\theta_0)}{ml_0^2 \sin^2(\theta_0)} \delta\theta \quad (30)$$

ή μέσω της (25),

$$\dot{\phi}(t) = \frac{J}{ml_0^2 \sin^2(\theta_0)} - \frac{2J \cot(\theta_0)}{ml_0^2 \sin^2(\theta_0)} \left( \frac{\beta(\theta_0)}{\omega_\theta^2(\theta_0)} + B \sin(\omega_\theta t + \xi) \right) \quad (30).$$

Μέσω του αποτελέσματος (25) συμπεραίνουμε ότι στην προσέγγιση των ταλαντώσεων μικρού πλάτους, η πολική γωνία εκτελεί ταλάντωση με συχνότητα  $\omega_\theta$ , ενώ μέσω του αποτελέσματος (29) ότι η παραμόρφωση του ελατηρίου εκτελεί την σύνθεση δύο απλών ταλαντώσεων με συχνότητες  $\omega_0$  και  $\omega_\theta$ . Επίσης η χρονική εξέλιξη της γωνιακής ταχύτητας (30) εξαρτάται από μία απλή ταλάντωση με συχνότητα  $\omega_\theta$ . Είναι προφανές ότι η χρονική εξέλιξη της αζιμουθιακής γωνίας προκύπτει με την, ως προς τον χρόνο, ολοκλήρωση της συνάρτησης (30).

#### 4. Παραμετρικός συντονισμός

Παρατηρούμε ότι στην ειδική περίπτωση όπου η συχνότητα  $\omega_\theta$  της κίνησης της πολικής γωνίας συμπίπτει με την συχνότητα  $\omega_0$ , ήτοι  $\omega_0 = \omega_\theta(\theta_0)$ , τότε ο δεύτερος όρος της εξίσωσης κίνησης (29) για την παραμόρφωση του ελατηρίου απειρίζεται εξ' αιτίας του σταθερού όρου

$$B \frac{a(\theta_0)}{\omega_0^2 - \omega_\theta^2(\theta_0)} \rightarrow \infty.$$

Ο απειρισμός παρατηρείται όταν η σταθερή στροφορμή (6) του υλικού σημείου γίνει ίση με

$$J_\sigma(\theta_0) = ml_0^{3/2} \sin^2(\theta_0) \sqrt{\frac{\omega_0^2 l_0 - g \cos(\theta_0)}{2 + \cos(2\theta_0)}} \quad (31).$$

Στο τελευταίο αποτέλεσμα καταλήξαμε επιλύοντας την εξίσωση (22) ως προς  $J$ , θέτοντας ταυτόχρονα  $\omega_\theta = \omega_0$ . Συνεπώς παραμετρικός συντονισμός παρατηρείται για κάθε δυνατή τιμή  $\theta_0$  της πολικής γωνίας, αν υποθέσουμε ότι το υλικό σημείο ως προς την γωνία αυτή εκτελεί ταλαντώσεις μικρού πλάτους και αν η στροφορμή του λάβει την τιμή του

αποτελέσματος (31). Φυσικά ο απειρισμός της παραμόρφωσης του ελατηρίου οφείλεται στο ότι η διαφορική εξίσωση (29) δεν είναι πλέον ικανή να περιγράψει την χρονική εξέλιξη του συστήματος. Προφανώς η σωστή διαφορική εξίσωση που περιγράφει τώρα την κίνηση της γενικευμένης συντεταγμένης  $r$ , προκύπτει αν αρχικά στην εξίσωση (24) για την πολική γωνία θέσουμε  $J = J_\sigma(\theta_0)$  στην συνάρτηση  $\beta(\theta_0)$  και στην συχνότητα  $\omega_\theta(\theta_0)$ , οπότε  $\omega_\theta = \omega_0$  και

$$\delta\ddot{\theta} + \omega_0^2 \delta\theta = \beta_\sigma(\theta_0) \quad (32),$$

όπου

$$\beta_\sigma(\theta_0) = \frac{l_0 \omega_0^2 \cot(\theta_0) + \frac{1}{4} g [\cos(4\theta_0) - 5]}{l_0 [\cos(2\theta_0) + 2] \sin^2(\theta_0)} \quad (33).$$

Τώρα η χρονική εξέλιξη της πολικής γωνίας δίνεται από την συνάρτηση

$$\delta\theta_\sigma(t) = \frac{\beta_\sigma(\theta_0)}{\omega_0^2} + B_\sigma \sin(\omega_0 t + \xi_\sigma) \quad (34).$$

Στην συνέχεια η διαφορική εξίσωση (29) λαμβάνει την μορφή  $\ddot{r} + \omega_0^2 r = \gamma_\sigma(\theta_0) + a_\sigma(\theta_0) \delta\theta_\sigma$  ή

$$\ddot{r}_\sigma + \omega_0^2 r_\sigma = \gamma_\sigma(\theta_0) + a_\sigma(\theta_0) \left[ \frac{\beta_\sigma(\theta_0)}{\omega_0^2} + B_\sigma \sin(\omega_0 t + \xi_\sigma) \right] \quad (35),$$

όπου τώρα οι συναρτήσεις  $\gamma_\sigma$  και  $a_\sigma$  προκύπτουν αν θέσουμε  $J = J_\sigma(\theta_0)$  στα αποτελέσματα (27) και (28), οπότε

$$\gamma_\sigma(\theta_0) = \frac{l_0 \omega_0^2 + 2g \cos^3(\theta_0)}{2 + \cos(\theta_0)} \quad (36), \quad a_\sigma(\theta_0) = -g + g \sin(\theta_0) + \frac{g + 2l_0 \omega_0^2 \cos(\theta_0)}{2 + \cos(\theta_0)} \quad (37).$$

Η δε λύση της διαφορικής εξίσωσης (35) ισούται με

$$r_\sigma(t) = \frac{a_\sigma(\theta_0) \beta_\sigma(\theta_0)}{\omega_0^4} + \frac{\gamma_\sigma(\theta_0)}{\omega_0^2} + C_\sigma \sin(\omega_0 t + \psi_\sigma) + B_\sigma \frac{a_\sigma(\theta_0)}{4\omega_0^2} [\sin(\omega_0 t + \xi_\sigma) - 2\omega_0 t \cos(\omega_0 t + \xi_\sigma)] \quad (38).$$

Τέλος η συνάρτηση (30) που περιγράφει την χρονική εξέλιξη της γωνιακής ταχύτητας ισούται προφανώς με

$$\dot{\varphi}_\sigma(t) = \frac{J_\sigma(\theta_0)}{ml_0^2 \sin^2(\theta_0)} - \frac{2J_\sigma(\theta_0) \cot(\theta_0)}{ml_0^2 \sin^2(\theta_0)} \left( \frac{\beta_\sigma(\theta_0)}{\omega_0^2} + B_\sigma \sin(\omega_0 t + \xi_\sigma) \right) \quad (39).$$

Γίνεται προφανές ότι για κάθε γωνία  $\theta_0$ , με την κατάλληλη στροφορμή συντονισμού  $J_\sigma(\theta_0)$ , η παραμόρφωση του ελατηρίου αυξάνει συνεχώς με τον χρόνο εξ' αιτίας του όρου

$$-B_\sigma \frac{a_\sigma(\theta_0)}{4\omega_0^2} 2\omega_0 t \cos(\omega_0 t + \xi_\sigma).$$

Ταυτόχρονα η πολική γωνία δεν αλλάζει είδος κίνησης, αλλά συνεχίζει να εκτελεί απλή ταλάντωση πέριξ της σταθερής τιμής της  $\theta_0$ , όπως και η γωνιακή ταχύτητα ως προς τον άξονα  $z$ .

## 5. Η περίπτωση $\theta_0 = \pi/2$

Τέλος θα εξετάσουμε την ειδική περίπτωση όπου το υλικό σημείο περιστρέφεται πέριξ του άξονα  $z$ , διαγράφοντας τροχιά της οποίας η πολική γωνία εκτελεί ταλαντώσεις μικρού πλάτους πέριξ του οριζοντίου επιπέδου  $xOy$ , δηλαδή πέριξ της γωνίας  $\theta_0 = \pi/2$ . Τότε σύμφωνα με τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι

$$(31) \rightarrow J_\sigma(\pi/2) = ml_0^2\omega_0 \quad (40\alpha), \quad (33) \rightarrow \beta_\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{g}{l_0} \quad (40\beta)$$

και

$$(36) \rightarrow \gamma_\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) = l_0\omega_0^2 \quad (40\gamma), \quad (36) \rightarrow a_\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) = g \quad (40\delta).$$

Συνεπώς στην ειδική αυτή περίπτωση η σταθερή στροφορμή συντονισμού ισούται με  $ml_0^2\omega_0$  και η γωνιακή ταχύτητα πέριξ του άξονος  $z$  προκύπτει επίσης σταθερή και ίση με

$$(39) \rightarrow \dot{\phi}_\sigma(t) = \frac{J_\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)}{ml_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \omega_0 \quad (41).$$

Επίσης οι απλές ταλαντώσεις της πολικής γωνίας περιγράφονται από την συνάρτηση (34), οπότε

$$\theta(t) = \theta_0 + \delta\theta_\sigma(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{g}{l_0\omega_0^2} + B_\sigma \sin(\omega_0 t + \xi_\sigma) \quad (42),$$

υπό την προϋπόθεση ότι τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος  $l_0$ ,  $k$  και  $m$  ικανοποιούν την ανισότητα

$$B_\sigma - \frac{g}{l_0\omega_0^2} \ll \frac{\pi}{2}$$

Εφ' όσον έχουμε ήδη υποθέσει ταλαντώσεις μικρού πλάτους, ήτοι  $B_\sigma \ll 1$ , η τελευταία συνθήκη γράφεται ισοδύναμα ως

$$\frac{g}{l_0\omega_0^2} \ll \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{mg}{l_0k} \ll \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{l_0k}{m} \ll \frac{2}{\pi}g.$$

Η δε παραμόρφωση του ελατηρίου (38) απλοποιείται στην συνάρτηση

$$r_\sigma(t) = l_0 - \frac{g^2}{l_0\omega_0^4} + C_\sigma \sin(\omega_0 t + \psi_\sigma) + B_\sigma \frac{g}{4\omega_0^2} [\sin(\omega_0 t + \xi_\sigma) - 2\omega_0 t \cos(\omega_0 t + \xi_\sigma)] \quad (43).$$

Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της περίπτωσης  $\theta_0 = \pi/2$  είναι ότι η γωνιακή ταχύτητα του υλικού σημείου στον άξονα  $z$  προκύπτει σταθερή, κάτι το οποίο δεν ισχύει για τις γωνίες  $0 < \theta_0 < \pi$ .