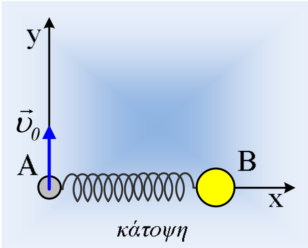
Δυο σώματα αλληλεπιδρούν…



Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο σφαίρες Α και Β με μάζες m_1=1kg και m_2=2kg δεμένες στα άκρα ενός ιδανικού (αβαρούς) ελατηρίου, ο άξονας του οποίου βρίσκεται πάνω στον άξονα x, ενώ η σφαίρα Α βρίσκεται στην αρχή των ορθογωνίων οριζοντίων αξόνων x,y όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή t_0=0, η Α σφαίρα δέχεται κατάλληλο κτύπημα με αποτέλεσμα να κινηθεί με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0=4m/s, με κατεύθυνση αυτή του άξονα y.

i) Να υπολογιστεί η αρχική ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών, καθώς και ο αρχικός ρυθμός μεταβολής της ορμής κάθε σώματος.

ii) Κάποια στιγμή t_1 η σφαίρα Α έχει ταχύτητα με διεύθυνση αυτή του άξονα x, με φορά προς τα δεξιά και μέτρο υ_{1x}=2,3m/s.

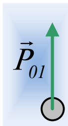
α) Να βρεθεί η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Α μεταξύ των χρονικών στιγμών t_0 (μετά το κτύπημα) και t_1.

β) Να υπολογιστεί η ορμή της Β σφαίρας τη στιγμή t_1.

γ) Στο παραπάνω χρονικό διάστημα το ελατήριο ασκεί δυνάμεις στις δυο σφαίρες. Υποστηρίζεται η άποψη ότι τα έργα των δύο δυνάμεων από t_0 έως t_1 είναι αντίθετα, αφού παράγονται από αντίθετες δυνάμεις. Να εξετάσετε αν αυτό είναι σωστό, υπολογίζοντας τα έργα των δυνάμεων που ασκεί το ελατήριο σε κάθε σφαίρα.

δ) Να σχολιάσετε τα παραπάνω αποτελέσματα.

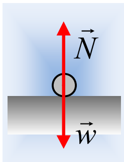
Απάντηση:



i) Αφού τα σώματα ισορροπούν πριν το κτύπημα, δεν δέχονται δυνάμεις από το ελατήριο (αυτό έχει το φυσικό μήκος του). Αλλά τότε και αμέσως μετά το κτύπημα, δεν έχει αλλάξει το μήκος του ελατηρίου, οπότε αυτό δεν ασκεί δυνάμεις στις σφαίρες και η σφαίρα Β δεν κινείται. Αυτό σημαίνει ότι ορμή έχει μόνο η Α σφαίρα με διεύθυνση του άξονα y και μέτρο:

$$P_{01} = m_1\upsilon_0 = 1\cdot 4kg\cdot m/s = 4kg\cdot m/s$$

Εξάλλου ο γενικευμένος νόμος του Νεύτωνα μας δίνει ότι:



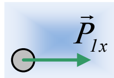
$$\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \Sigma\vec{F}$$

Αλλά τη στιγμή αυτή η συνισταμένη των δυνάμεων σε κάθε σφαίρα είναι μηδενική, αφού οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε μια είναι το βάρος και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου, δυνάμεις κατακόρυφες, όπου $\vec{N} + \vec{w} = 0$, μιας και κάθε σφαίρα ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση.

Οπότε:

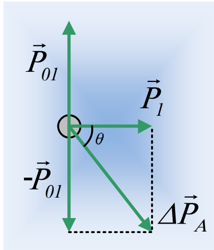
$$\frac{\Delta\vec{P}_A}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{P}_B}{\Delta t}=0$$

ii) Τη στιγμή t_1 η σφαίρα Α έχει ταχύτητα στη διεύθυνση x, οπότε και η ορμή της έχει την ίδια κατεύθυνση και μέτρο:



$$P_1=m_1\upsilon_{1x}=1\cdot 2,3kg\cdot m/s=2,3kg\cdot m/s$$

α) Η μεταβολή της ορμής της Α σφαίρας μεταξύ των χρονικών στιγμών t_0 και t_1 είναι ίση:



$$\Delta\vec{P}_A=\vec{P}_1-\vec{P}_0=\vec{P}_1+\left(-\vec{P}_0\right)$$

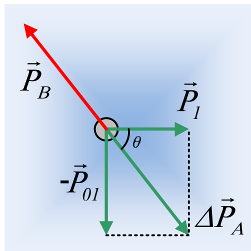
Η μεταβολή της ορμής της Α σφαίρας δηλαδή, είναι το διανυσματικό άθροισμα της τελικής ορμής $\vec{P}_1$ και της αντίθετης της αρχικής ορμής $-\vec{P}_0$. Οπότε με βάση το διπλανό σχήμα για το μέτρο της μεταβολής της ορμής έχουμε:

$$\Delta P_A=\sqrt{P_1^2+P_{01}^2}=\sqrt{2,3^2+4^2}\,kg\cdot m/s\approx 4,6kg\cdot m/s$$

Ενώ η κατεύθυνσή της σχηματίζει με την διεύθυνση x γωνία θ, όπου:

$$\varepsilon\phi\vartheta=\frac{P_{01}}{P_1}=\frac{4}{2,3}\approx 1,7$$

β) Το σύστημα των δύο σφαιρών αλληλεπιδρά μέσω των δυνάμεων που ασκεί το ιδανικό ελατήριο. Αλλά τότε αν πάρουμε ως σύστημα τις δυο σφαίρες και το ελατήριο, το σύστημα θα είναι μονωμένο, με αποτέλεσμα η ορμή του να παραμένει σταθερή ή ισοδύναμα:



$$\Delta\vec{P}_A+\Delta\vec{P}_B=0\rightarrow\Delta\vec{P}_B=-\Delta\vec{P}_A\rightarrow\ \vec{P}_B-0=-\Delta\vec{P}_A\rightarrow$$

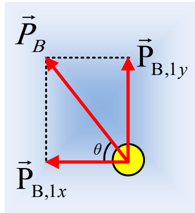
$$\vec{P}_B=-\Delta\vec{P}_A$$

Η τελευταία εξίσωση μας λέει ότι η ορμή της Β σφαίρας έχει μέτρο ίσο με $P_B\approx 4,6kg\cdot m/s$ και κατεύθυνση αντίθετη της μεταβολής $\Delta\vec{P}_A$ που υπολογίσαμε παραπάνω.

Εναλλακτικά: Η διατήρησης της ορμής του συστήματος μπορεί να γραφεί:

$$\vec{P}_{A,0}+\vec{P}_{B,0}=\vec{P}_{A,1}+\vec{P}_{B,1}\Rightarrow\begin{cases}P_{A,0x}+P_{B,0x}=P_{A,1x}+P_{B,1x}\rightarrow 0=P_{1x}+P_{B,1x}\\ P_{A,0y}+P_{B,0y}=P_{A,1y}+P_{B,1y}\rightarrow P_{01}=P_{B,1y}\end{cases}$$

$$\mathrm{P}_{B,1x}=-\mathrm{P}_{1x}=-2,3kg\cdot m/s\quad\text{και}\quad \mathrm{P}_{B,1y}=\mathrm{P}_{01}=4Kg\cdot m/s$$

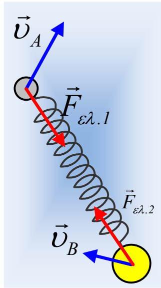


Οπότε η ορμή της δεύτερης σφαίρας, με βάση και το διπλανό σχήμα, έχει μέτρο:

$$P_B = \sqrt{P_{B,1x}^2 + P_{B,1y}^2} = \sqrt{2{,}3^2 + 4^2}\,kg \cdot m/s \approx 4{,}6\,kg \cdot m/s$$

Ενώ η κατεύθυνσή της σχηματίζει με την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x γωνία θ, όπου:

$$\varepsilon\phi\vartheta = \frac{P_{B,1y}}{P_{B,1x}} = \frac{4}{2{,}3} \approx 1{,}7$$



γ) Εφαρμόζουμε για κάθε σφαίρα το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργεια για την κίνησή της στο χρονικό διάστημα t_0-t_1. Για την Α σφαίρα:

$$K_{1,1} - K_{0,1} = W_w + W_N + W_{F_{\varepsilon\lambda 1}}$$

Αλλά $W_w = W_N = 0$ αφού οι δυνάμεις είναι κάθετες στη μετατόπιση, οπότε:

$$W_{F_{\varepsilon\lambda 1}} = K_{1,1} - K_{0,1} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{P_1}{m_1}\right)^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \;\rightarrow$$

$$W_{F_{\varepsilon\lambda 1}} = \frac{P_1^2}{2m_1} - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = \frac{2{,}3^2}{2\cdot 1}J - \frac{1}{2}1\cdot 4^2 J = -5{,}36J$$

Για την Β σφαίρα:

$$K_{1,2} - K_{0,2} = W_w + W_N + W_{F_{\varepsilon\lambda 2}}$$

Αλλά $W_w = W_N = 0$ αφού οι δυνάμεις είναι κάθετες στη μετατόπιση, οπότε:

$$W_{F_{\varepsilon\lambda 2}} = K_{1,2} - K_{0,2} = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 - 0 = \frac{1}{2}m_2\left(\frac{P_2}{m_2}\right)^2 \;\rightarrow$$

$$W_{F_{\varepsilon\lambda 2}} = \frac{P_2^2}{2m_2} = \frac{4{,}6^2}{2\cdot 2}J = 5{,}29J$$

δ) Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα βλέπουμε ότι μπορεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα δυο σώματα να είναι αντίθετες, αλλά δεν είναι αντίθετα τα δυο έργα. Η δύναμη που ασκείται στην Α σφαίρα (η $F_{\varepsilon\lambda.1}$) αφαίρεσε κινητική ενέργεια ίση με 5,36J, αλλά στην Β σφαίρα μεταφέρθηκε κινητική ενέργεια ίση με 5,29J. Η διαφορά (5,36J-5,29J=0,07J) είναι η ενέργεια η οποία έχει παρακρατηθεί από το ελατήριο. Έχει αποθηκευτεί σε αυτό με τη μορφή της δυναμικής ενέργειας λόγω παραμόρφωσης.

dmargaris@gmail.com