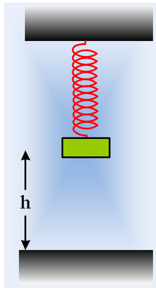
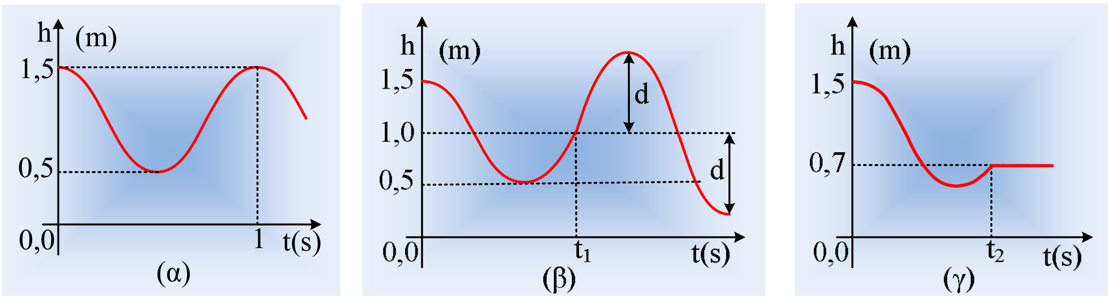
Μια ταλάντωση και το ύψος

Ένα σώμα Σ μάζας 1kg, εκτελεί ααт στο άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου.



i) Να αποδείξετε ότι το ύψος h του σώματος από το έδαφος, είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου.

ii) Αν η γραφική παράσταση του ύψους του σώματος από το έδαφος είναι της μορφής του (α) σχήματος, να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική.



iii) Σε μια επανάληψη του πειράματος, το σώμα Σ κάποια στιγμή t_1 συγκρούεται με δεύτερο σώμα Β, το οποίο κινείται κατακόρυφα, με αποτέλεσμα η γραφική παράσταση του ύψους σε συνάρτηση με το χρόνο, να είναι της μορφής του (β) σχήματος.

α) Η κρούση αυτή είναι πλαστική ή όχι και γιατί;

β) Το σώμα Β πριν την κρούση είχε ταχύτητα προς τα πάνω ή προς τα κάτω;

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

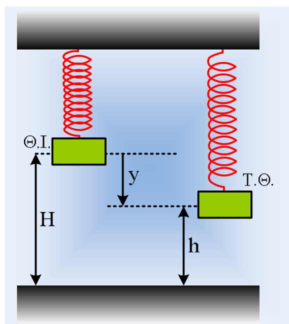
iv) Σε ένα άλλο πείραμα το σώμα Σ συγκρούεται με σώμα Γ, με αποτέλεσμα η αντίστοιχη γραφική παράσταση να είναι η (γ) στο παραπάνω σχήμα.

α) Πόση είναι η μάζα του σώματος Γ;

β) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος Γ ελάχιστα πριν την κρούση.

Δίνεται $g=10m/s^2$ και $\pi^2 \approx 10$.

Απάντηση:



i) Έστω ότι η θέση ισορροπίας του σώματος βρίσκεται σε ύψος Η από το έδαφος, ενώ κάποια στιγμή το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση y, όπως στο διπλανό σχήμα. Τότε το σώμα βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος και ισχύει:

$$H=h+y \rightarrow$$

$$h=H-y \rightarrow$$

$$h=H-A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_o)$$

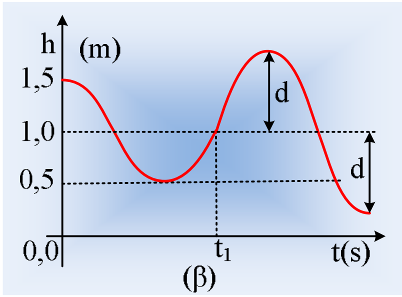
Η παραπάνω εξίσωση μας λέει ότι το ύψος h από το έδαφος μεταβάλλεται αρμονικά (ημιτονοειδώς) με το χρόνο, απλά η γραφική παράσταση h=h(t) θα είναι μετατοπισμένη κατά Η σε σχέση με τον άξονα των χρόνων.

ii) Με βάση το (α) σχήμα, το σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα απέχοντας από το έδαφος αποστάσεις από 0,5m μέχρι 1,5m. Αλλά τότε το πλάτος ταλάντωσης είναι A=0,5m, ενώ η περίοδος είναι T=1s. Εξάλλου τη στιγμή t=0, το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του από την πάνω ακραία θέση, δηλαδή από απομάκρυνση y=+A, οπότε η αρχική φάση της απομάκρυνσης είναι π/2 (γιατί;) και η εξίσωση γράφεται:

$$y = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_o) \rightarrow$$

$$y = 0{,}5 \cdot \eta\mu\left(2\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(S.I.)}$$

iii) Με βάση το (β) διάγραμμα, η κρούση πραγματοποιήθηκε τη στιγμή t_1 όπου το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας (το σώμα ταλαντώνεται γύρω από τη θέση ισορροπίας του σε ύψος H=1m) και καθώς κινείται προς τα πάνω.

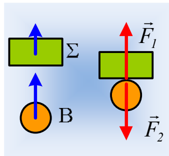


(β)

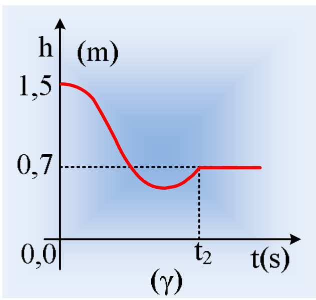
α) Με βάση το διάγραμμα, το σώμα δεν αλλάζει θέση ισορροπίας και απλά ταλαντώνεται με νέο πλάτος d>0,5m. Αλλά τότε η κρούση δεν είναι πλαστική, αφού δεν έχουμε αλλαγή στη μάζα του ταλαντούμενου σώματος, μιας και στη θέση ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow k\Delta\ell = m_1 g$$

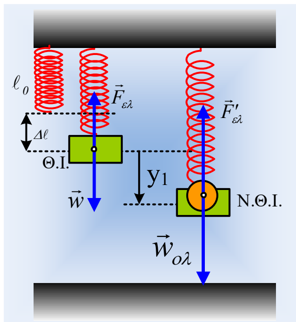
β) Με βάση τα παραπάνω, το σώμα Σ κερδίζει ενέργεια κατά την κρούση, αφού αυξάνεται το πλάτος ταλάντωσης, ενώ κινείται προς τα πάνω και συνεχίζει να κινείται και μετά την κρούση προς τα πάνω. Αλλά τότε η κατάσταση πριν την κρούση, είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα και το σώμα Β, είχε ταχύτητα προς τα πάνω. Έτσι μόλις τα σώματα έρθουν σε επαφή, ασκείται στο σώμα Σ η δύναμη F_1, μέσω του έργου της οποίας, το σώμα κερδίζει ενέργεια.



iv) Με βάση το (γ) διάγραμμα η κρούση έγινε σε απομάκρυνση y_1=-0,3m (0,3m κάτω από την αρχική θέση ισορροπίας του, η οποία βρίσκεται σε ύψος 1m). Μετά την κρούση το ύψος από το έδαφος δεν μεταβάλλεται, πράγμα που σημαίνει ότι η κρούση είναι πλαστική και η θέση της κρούσης είναι και νέα θέση ισορροπίας του συσσωματώματος.



(γ)



α) Για την αρχική θέση ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow k\Delta\ell = m_1 g \ (1)$$

Για την νέα θέση ισορροπίας:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow k(\Delta\ell + y_1) = (m_1 + m_2)g \xrightarrow{(1)} ky_1 = m_2 g \quad (2)$$

Αλλά από την περίοδο ταλάντωσης του σώματος Σ παίρνουμε:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \rightarrow k = \frac{4\pi^2 m_1}{T} = 40N/m \rightarrow$$

Οπότε από την (2) παίρνουμε:

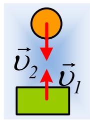
$$m_2 = \frac{ky_1}{g} = \frac{40 \cdot 0,3}{10}kg = 1,2kg$$

β) Από την ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος Σ, παίρνουμε για την ταχύτητα υ_1 ελάχιστα πριν την κρούση:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}ky_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow$$

$$|\upsilon_1| = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - y_1^2\right)} = \sqrt{\frac{40}{1}\left(0,5^2 - 0,3^2\right)}m/s = 0,8\pi\ m/s$$

Αλλά με βάση το διάγραμμα (γ) το σώμα Σ είχε φτάσει στην κάτω ακραία θέση και είχε αρχίζει να ανεβαίνει προς την θέση ισορροπίας του, όταν έγινε η κρούση, οπότε η ταχύτητά του είναι προς τα πάνω. Αλλά τότε το σώμα Γ κινείται προς τα κάτω με μια ταχύτητα μέτρου υ_2, αφού θα πρέπει η συνολική ορμή να είναι μηδενική. Πράγματι εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση παίρνουμε:



$$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \rightarrow$$

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = 0 \rightarrow$$

$$\upsilon_2 = -\frac{m_1\upsilon_1}{m_2} = -\frac{1 \cdot 0,8\pi}{1,2}m/s = -\frac{2\pi}{3}m/s$$

dmargaris@gmail.com