

### Άλλη μια σύνθεση ταλαντώσεων

Ένα σώμα μάζας 0,2kg ταλαντώνεται με εξίσωση:

$$y = 5 \cdot \eta\mu(2\pi t) + 3 \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t) + \sqrt{2}\eta\mu\left(2\pi t + \frac{3\pi}{4}\right) \text{ (cm)}$$

- i) Να αποδείξετε ότι η κίνηση του σώματος είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου και να υπολογίσετε το πλάτος και την αρχική φάση της απομάκρυνσης.
- ii) Τη χρονική στιγμή  $t_1=0,25\text{s}$  να βρεθούν:
  - α) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος.
  - β) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας.

**Απάντηση:**

- i) Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κίνηση του σώματος συντίθεται από τρεις γραμμικές αρμονικές ταλαντώσεις με εξισώσεις:

$$y_1 = 5 \cdot \eta\mu(2\pi t) \text{ (cm)}$$

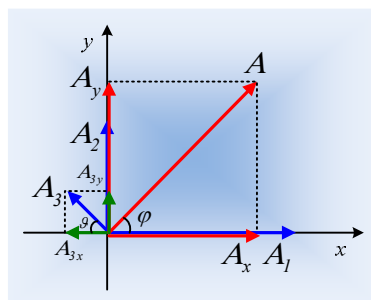
$$y_2 = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t) = 3 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (cm)}$$

και

$$y_3 = \sqrt{2}\eta\mu\left(2\pi t + \frac{3\pi}{4}\right) \text{ (cm)}$$

Παίρνουμε τρία περιστρεφόμενα διανύσματα το πρώτο με μήκος 5cm, το δεύτερο με μήκος 3cm και το τρίτο με μήκος  $\sqrt{2}$  (cm) που στρέφονται με γωνιακή ταχύτητα  $\omega=2\pi$  rad/s. Η προβολή τους στον άξονα y, θα μας δίνει κάθε στιγμή τις αντίστοιχες απομακρύνσεις  $y_1$ ,  $y_2$  και  $y_3$ .

Έστω ότι σχεδιάζουμε τα τρία διανύσματα για  $t=0$  (μπλε χρώματος). Θα πάρουμε την παρακάτω εικόνα.



Αν αναλύσουμε το διάνυσμα  $A_3$  σε συνιστώσες (πράσινου χρώματος) πάνω στους άξονες x και y, λαμβάνοντας υπόψη ότι  $\theta=45^\circ$ , θα πάρουμε:

$$A_{3x} = A_3 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm} = 1 \text{ cm} \text{ και}$$

$$A_{3y} = A_3 \cdot \eta\mu\theta = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm} = 1 \text{ cm}$$

Έτσι έχουμε:

$$A_x = A_1 - A_{3x} = 5 \text{ cm} - 1 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

$$A_y = A_2 + A_{3y} = 3 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

Και από το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} \text{ cm} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

Ενώ για τη γωνία που σχηματίζει το πλάτος  $A$  με τον άξονα  $x$  θα είναι:

$$\epsilon\phi\varphi = \frac{A_y}{A_x} = \frac{4}{4} = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Αλλά καθώς όλα τα παραπάνω διανύσματα στρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα και το διάνυσμα  $A$ , ως συνισταμένη των τριών διανυσμάτων, θα στρέφεται επίσης με την ίδια γωνιακή ταχύτητα  $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$  και η προβολή του κάθε στιγμή θα μας δίνει την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του.

Συνεπώς η εξίσωση της κίνησης του σώματος μετασχηματίζεται στην ισοδύναμη εξίσωση:

$$y = 4\sqrt{2}\eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) \text{ (cm)}$$

Από όπου βλέπουμε ότι το πλάτος είναι ίσο με  $4\sqrt{2} \text{ cm}$  ενώ η αρχική φάση της απομάκρυνσης είναι

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

ii) Τη χρονική στιγμή  $t_1 = 0,25 \text{ s}$ , το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση:

$$y_1 = 4\sqrt{2}\eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(2\pi \cdot \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 4 \text{ cm}$$

Έχοντας ταχύτητα:

$$v_1 = A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow$$

$$v_1 = 8\pi\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 8\pi\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ cm/s} = -8\pi \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

Οπότε με βάση τις τιμές αυτές:

α) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος είναι:

$$\frac{dP}{dt} = F = ma = m(-\omega^2 \cdot x)$$

και με αντικατάσταση:

$$\frac{dP}{dt} = -0,2 \cdot (2\pi)^2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s}^2 = -0,32 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s}^2.$$

Η αρνητική τιμή του ρυθμού αυτού, σημαίνει ότι το διάνυσμα  $\frac{d\vec{P}}{dt}$  κατευθύνεται προς την αρνητική κατεύθυνση (εδώ προς την θέση ισοροπίας).

β) Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_F}{dt} = \frac{|F| \cdot |dx| \cdot \sigma \nu \alpha}{dt} = |F| \cdot |v_l| \cdot \sigma \nu \alpha$$

Όπου  $F = -0,32 \text{ N}$  (δες προηγούμενη απάντηση), ενώ  $v_l = -8\pi \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$ , οπότε τα δυο διανύσματα έχουν την ίδια κατεύθυνση και  $\alpha = 0^\circ$ , οπότε:

$$\frac{dK}{dt} = |F| \cdot |v_l| = 0,32 \cdot 8\pi \cdot 10^{-2} \text{ J/s} = 0,08 \text{ J/s}$$

Η θετική τιμή του αντίστοιχου ρυθμού, σημαίνει ότι η κινητική ενέργεια του σώματος αυξάνεται.

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)