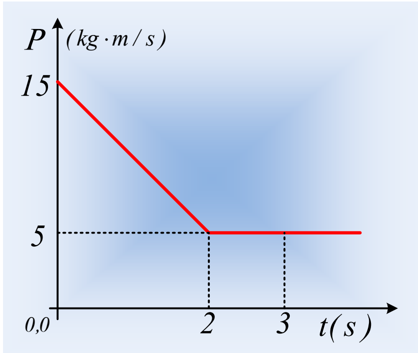
Η ορμή ενός σώματος και η μεταβολή της

Ένα σώμα μάζας 2kg κινείται σε οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0,1, ενώ πάνω του ασκείται και οριζόντια δύναμη F. Στο σχήμα δίνεται η ορμή του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.



i) Να υπολογιστεί ο μέσος ρυθμός μεταβολής της ορμής από 0-2s, καθώς και ο αντίστοιχος στιγμιαίος ρυθμός τη στιγμή t_1=0,8s.

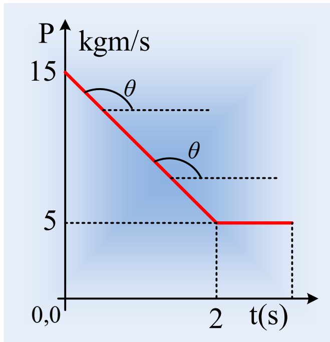
ii) Να βρεθεί η δύναμη F η οποία ασκείται στο σώμα στο χρονικό διάστημα 0-2s.

iii) Να βρεθεί επίσης η ασκούμενη δύναμη F τη στιγμή t_2=3s.

iv) Να υπολογισθεί το συνολικό έργο των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα από 0-3s.

v) Ποια η ισχύς της δύναμης F, τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 και ποιος ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος, τις στιγμές αυτές;

Απάντηση:



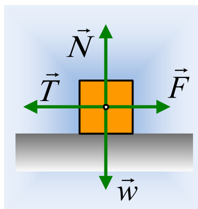
i) Για το μέσο ρυθμό μεταβολής της ορμής από 0-2s έχουμε:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t}=\frac{P_{\tau\varepsilon\lambda}-P_{\alpha\rho\chi}}{t_{\tau\varepsilon\lambda}-t_{\alpha\rho\chi}}=\frac{5-15}{2-0}kg\cdot{}^{m}\!/\!_{s^2}=-5kg\cdot{}^{m}\!/\!_{s^2}.$$

Ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της ορμής, είναι ίσος με την κλίση στο διάγραμμα P-t. Αλλά με βάση το διπλανό σχήμα, στο χρονικό διάστημα 0-2s, η κλίση της ευθείας είναι σταθερή, συνεπώς και ο στιγμιαίος ρυθμός είναι σταθερός και ίσος με το μέσο ρυθμό μεταβολής της ορμής. (Θυμηθείτε τη μέση και στιγμιαία ταχύτητα…). Συνεπώς και τη στιγμή t_1=0,8s έχουμε:

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta t}\right)_{\sigma\tau}=\frac{dP}{dt}=-5kg\cdot{}^{m}\!/\!_{s^2}.$$

ii) Θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική (φορά της ταχύτητας), στο σώμα ασκείται δύναμη τριβής ολίσθησης, όπως στο διπλανό σχήμα, με μέτρο:



$$T_{o\lambda}=\mu N$$

Αλλά το σώμα ισορροπεί στον κατακόρυφο άξονα, οπότε $\Sigma F_y=0 \rightarrow$ N=w=mg, οπότε:

$$T_{o\lambda}=\mu N=\mu mg=0,1\cdot 2\cdot 10N=2N$$

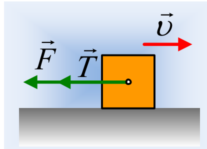
Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\Sigma\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}\rightarrow\ \Sigma F=\frac{\Delta P}{\Delta t}\rightarrow$$

$$F+T=\frac{\Delta P}{\Delta t}\rightarrow$$

$$F+(-2N)=-5kg\cdot {}^{m}\!/_{s^2}\rightarrow$$

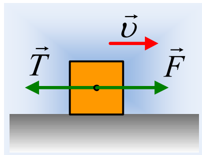
$$F_1=-3N.$$



Η τιμή της δύναμης που βρήκαμε (-3N), σημαίνει ότι η ασκούμενη δύναμη έχει την ίδια κατεύθυνση με την τριβή, έχει δηλαδή αντίθετη κατεύθυνση από την ταχύτητα, όπως στο σχήμα.

Αξίζει να επισημανθεί, ότι στο διάστημα 0-2s ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι σταθερός, οπότε και η ασκούμενη δύναμη F παραμένει σταθερή με μέτρο F_1=3N.

iii) Τη στιγμή t_3 η κλίση της ευθείας είναι μηδενική ή με άλλα λόγια για t>2s η ορμή παραμένει σταθερή, οπότε ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι μηδενικός. Έτσι εφαρμόζοντας ξανά το γενικευμένο νόμο παίρνουμε:

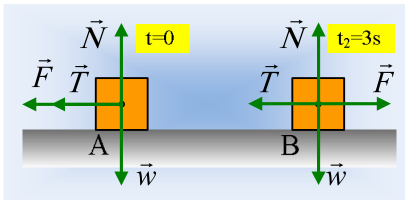


$$\Sigma\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}\rightarrow\ \Sigma F=\frac{\Delta P}{\Delta t}=0\rightarrow$$

$$F_2+(-2N)=0\rightarrow F_2=2N$$

Η ασκούμενη δύναμη, έχει τώρα θετική τιμή, δηλαδή φορά προς τα δεξιά, όπως στο διπλανό σχήμα.

iv) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα από τη θέση Α που διέρχεται τη στιγμή t_0=0, μέχρι τη θέση Β που βρίσκεται τη στιγμή t_2=3s.



$$K_2\text{-}K_0=W_{o\lambda}\ (1)$$

Αλλά $P=m\upsilon\rightarrow\ \upsilon=\dfrac{P}{m}$ οπότε:

$$K=\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{P}{m}\right)^2=\frac{P^2}{2m}$$

Οπότε από την (1) έχουμε:

$$W_{o\lambda}=\frac{P_2^2}{2m}-\frac{P_0^2}{2m}=\frac{P_2^2-P_0^2}{2m}\rightarrow$$

$$W_{o\lambda}=\frac{P_2^2-P_0^2}{2m}=\frac{5^2-15^2}{2\cdot 2}J=-50J$$

v) Για τη στιγμιαία ισχύ της δύναμης έχουμε:

$$P_F=\frac{dW_F}{dt}=\frac{|F|\cdot|dx|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}{dt}=|F|\cdot|\upsilon|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$$

Όπου α η γωνία μεταξύ δύναμης και ταχύτητας. Αντίστοιχα για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας με βάση το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, έχουμε:

$$\frac{dK}{dt}=\frac{dW_{\Sigma F}}{dt}=\frac{|\Sigma F|\cdot|dx|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}{dt}=|\Sigma F|\cdot|\upsilon|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$$

Υπολογίζουμε αρχικά τις ταχύτητες του σώματος τις χρονικές στιγμές που μας ενδιαφέρουν. Χρησιμοποιώντας ξανά το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα από 0-t_1 παίρνουμε:

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta t}\right)=-5kg\cdot m/s^2\rightarrow\frac{P_1-P_0}{t_1-t_0}=-5kg\cdot m/s^2\rightarrow$$

$$\frac{2\upsilon_1-15}{0{,}8-0}=-5\rightarrow\upsilon_1=5{,}5m/s$$

Ενώ τη στιγμή t_2 έχουμε $\upsilon_2=\frac{P_2}{m}=\frac{5}{2}m/s=2{,}5m/s$

Έτσι τη στιγμή t_1 θα έχουμε:

$$P_{1,F}=|F_1|\cdot|\upsilon_1|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=3\cdot 5{,}5\cdot(-1)W=-16{,}5W$$

$$\left(\frac{dK}{dt}\right)_1=|\Sigma F_1|\cdot|\upsilon_1|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=5\cdot 5{,}5\cdot(-1)W=-27{,}5W$$

Αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t_2=3s έχουμε:

$$P_{2,F}=|F_2|\cdot|\upsilon_2|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=2\cdot 2{,}5\cdot 1W=5W \text{ και}$$

$$\left(\frac{dK}{dt}\right)_2=|\Sigma F_2|\cdot|\upsilon_2|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=0$$

Σχόλιο:

Τη στιγμή t_1 η ισχύς της τριβής (με όμοιο τρόπο, όπως και για τη δύναμη…) υπολογίζεται:

$$P_{T,1}=|T|\cdot|\upsilon_1|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=2\cdot 5{,}5\cdot(-1)W=-11W$$

Πράγμα που σημαίνει ότι η κινητική ενέργεια μειώνεται κατά 27,5J/s, όπου τα 11J/s αφαιρούνται από το σώμα μέσω του έργου της τριβής και εμφανίζονται ως θερμική ενέργεια, ενώ τα υπόλοιπα 16,5J/s αφαιρούνται μέσω του έργο της δύναμης F.

Αντίστοιχα τη στιγμή t_2 έχουμε ότι:

$$P_{T,2}=|T|\cdot|\upsilon_2|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=2\cdot 2{,}5\cdot(-1)W=-5W$$

Πράγμα που σημαίνει ότι μέσω του έργου της δύναμης F μεταφέρεται ενέργεια στο σώμα με ρυθμό 5J/s, ενέργεια που αφαιρείται μέσω του έργου της τριβής, με αποτέλεσμα η κινητική ενέργεια να παραμένει σταθερή.

dmargaris@gmail.com