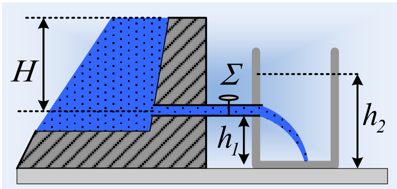
Πάμε να γεμίσουμε ένα μεγάλο δοχείο με νερό



Διαθέτουμε μια πολύ μεγάλη δεξαμενή με νερό. Ένας οριζόντιος σωλήνας διατομής $A=4cm^2$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να γεμίσουμε ένα μεγάλο δοχείο-ντεπόζιτο, το οποίο συνδέεται με τη δεξαμενή, όπως στο σχήμα.

Δίνονται $H=1{,}25m$, $h_1=55cm$, ενώ η στρόφιγγα Σ είναι αρχικά κλειστή.

Ανοίγουμε τη στρόφιγγα και αποκαθίσταται σύντομα μια μόνιμη και στρωτή ροή, την οποία προσομοιάζουμε με ροή ιδανικού ρευστού με πυκνότητα $\rho=1.000kg/m^3$, ενώ $g=10m/s^2$.

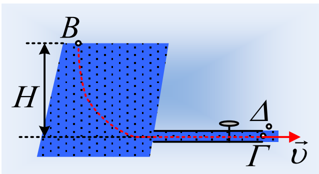
i) Να βρεθεί η ταχύτητα εκροής του νερού από το άκρο του σωλήνα, καθώς και η παροχή του σωλήνα.

ii) Η εξερχόμενη φλέβα νερού, καμπυλώνεται και φτάνει στον πυθμένα του δοχείου, χωρίς να διαχωρίζεται. Να βρεθεί η διατομή της, τη στιγμή που συναντά τον πυθμένα.

iii) Μετά από αρκετό χρόνο, το νερό έχει ανέλθει στο δοχείο μέχρι ύψος $h_2=1m$. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται ο όγκος του νερού στο δοχείο στην φάση αυτή;

Θεωρείστε ότι η δεξαμενή έχει πολύ μεγάλο όγκο, οπότε το γέμισμα του δοχείου δεν προκαλεί παρατηρήσιμη μεταβολή στο ύψος του νερού εντός της, ενώ και το δοχείο έχει αρκετό όγκο, οπότε η άνοδος της επιφάνειας του νερού να είναι πάρα πολύ αργή.

Απάντηση:



i) Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Β, στην επιφάνεια της δεξαμενής και ενός σημείου Γ, στην έξοδο του οριζόντιου σωλήνα, όπως στο σχήμα, μόλις αποκατασταθεί μόνιμη ροή (πρακτικά σε ελάχιστο χρόνο μόλις ανοίξουμε τη στρόφιγγα).

$$p_B + \rho g H + \frac{1}{2}\rho \upsilon_B^2 = p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho \upsilon_\Gamma^2 \quad (1)$$

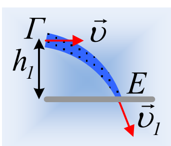
Αλλά $\upsilon_B=0$, ενώ η πίεση στην έξοδο (σημείο Γ) είναι ίση με την πίεση σε ένα σημείο Δ του αέρα, πάνω ακριβώς από τη φλέβα, συνεπώς ίση με την ατμοσφαιρική πίεση, οπότε $p_B = p_\Gamma = p_{\alpha\tau\mu}$ και από την (1) παίρνουμε:

$$\upsilon = \upsilon_\Gamma = \sqrt{2gH} \quad (2)$$

$$\upsilon = \upsilon_\Gamma = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1{,}25}\,m/s = 5m/s$$

Όσο για την παροχή, αυτή θα είναι:

$$\Pi = A \cdot \upsilon = 4 \cdot 10^{-4} \cdot 5m^3/s = 2 \cdot 10^{-3} m^3/s = 2L/s$$



ii) Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για μια μικρή μάζα νερού δm, από τη στιγμή που με ταχύτητα υ εξέρχεται του σωλήνα, μέχρι που φτάνει στον πυθμένα του δοχείου με ταχύτητα υ_1 (θεωρούμε U=0 στον πυθμένα):

$$U_{\alpha\rho} + K_{\alpha\rho} = U_{\tau\varepsilon\lambda} + K_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$\delta m \cdot gh_1 + \frac{1}{2}\delta m\upsilon^2 = \frac{1}{2}\delta m\upsilon_1^2 \to$$

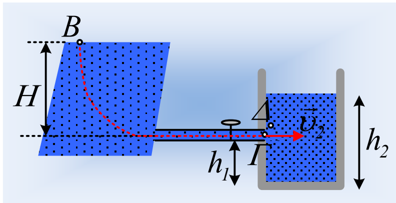
$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon^2 + 2gh_1} = \sqrt{5^2 + 2\cdot 10\cdot 0{,}55}m/s = 6m/s$$

Αλλά από την εξίσωση της συνέχειας για την φλέβα και για τις διατομές στα σημεία Γ και Ε παίρνουμε:

$$A\cdot\upsilon = A_E\cdot\upsilon_1 \to$$

$$A_E = \frac{A\cdot\upsilon}{\upsilon_1} = \frac{4cm\cdot 5m/s}{6m/s} = \frac{10}{3}cm^2$$

iii) Εφαρμόζουμε ξανά την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία Β και Γ, όπως και στο i) ερώτημα:



$$p_B + \rho gH + \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 = p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 \quad (3)$$

Αλλά υ_B=0, ενώ η πίεση στην έξοδο (σημείο Γ) είναι ίση με την πίεση σε ένα σημείο Δ σε βάθος y=h_2-h_1 εντός του νερού στο δοχείο, πάνω ακριβώς από τη φλέβα, συνεπώς $p_B = p_{ατμ}$ ενώ $p_\Gamma = p_{ατμ} + \rho gy$ και η (2) γίνεται:

$$p_{ατμ} + \rho gH = p_{ατμ} + \rho gy + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \to$$

$$\upsilon_2 = \upsilon_\Gamma = \sqrt{2g(H-y)} = \sqrt{2g\left(H-(h_2-h_1)\right)} \quad (4)$$

Με αντικατάσταση:

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g\left(H-(h_2-h_1)\right)} = \sqrt{2\cdot 10(1{,}25-(1-0{,}55)}m/s = 4m/s$$

Αλλά τότε ο όγκος του νερού στο δοχείο αυξάνεται κατά:

$$\frac{dV}{dt} = \Pi = A\cdot\upsilon_2 \to$$

$$\frac{dV}{dt} = A\cdot\upsilon_2 = 4\cdot 10^{-4}\cdot 4m^3/s = 1{,}6\cdot 10^{-3}m^3/s = 1{,}6L/s$$

Σχόλια:

- Η εξίσωση (2) δεν είναι τίποτα άλλο από το θεώρημα Torricelli. Τι μας λέει; Ότι η ταχύτητα εκροής, είναι η ταχύτητα που θα αποκτούσε μια μάζα νερού αν έπεφτε ελεύθερα από ύψος Η.
- Όμως ας δούμε τι μας λέει τώρα η εξίσωση (4). Η εξίσωση είναι ίδια με την (2) με τη διαφορά ότι τώρα το νερό είναι «σαν να πέφτει» από την επιφάνεια της δεξαμενής, στην επιφάνεια του νερού στο δοχείο! Αντί δηλαδή να έχουμε $\upsilon_\Gamma = \sqrt{2gH}$, έχουμε $\upsilon_\Gamma = \sqrt{2g(H-y)}$ όπου y το ύψος του νερού πάνω από το σημείο εξόδου του στο άκρο του σωλήνα Γ.

Υλικό Φυσικής-Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης