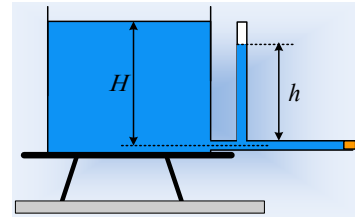


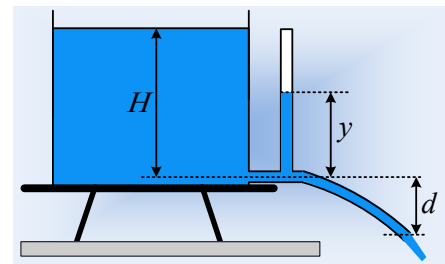
Ανοιγοκλείνουμε την τάπα και ο αέρας εγκλωβισμένος.

Στο σχήμα μια δεξαμενή περιέχει νερό σε ύψος $H=1,25\text{m}$ και κοντά στον πυθμένα της συνδέεται οριζόντιος σωλήνας, διατομής $0,4\text{cm}^2$, το άκρο του οποίου έχουμε κλείσει με μια τάπα. Στον σωλήνα αυτόν, έχει προσαρμοσθεί ένας δεύτερος λεπτός κατακόρυφος σωλήνας, ύψους H , κλειστός στο άνω άκρο του, εντός του οποίου το νερό έχει ανέβει κατά $h=1\text{m}$.



- i) Πόση δύναμη δέχεται η τάπα από το νερό και ποια η πίεση του εγκλωβισμένου αέρα στον κατακόρυφο σωλήνα;
- ii) Σε μια στιγμή βγάζουμε την τάπα και το νερό εκρέει από το άκρο Β του σωλήνα. Να βρεθεί η παροχή του σωλήνα.
- iii) Να βρεθεί το ύψος που ανέρχεται το νερό στο κατακόρυφο σωλήνα, στη διάρκεια της παραπάνω ροής.
- iv) Λυγίζουμε τον σωλήνα, ώστε να πάρει τη μορφή του σχήματος, όπου $d=55\text{cm}$. Ποιο το ύψος του νερού στον κατακόρυφο σωλήνα;

Θεωρούμε πολύ μεγάλη την ελεύθερη επιφάνεια του νερού στην δεξαμενή, το νερό ιδανικό ρευστό με πυκνότητα $\rho=1.000\text{kg/m}^3$ και τη ροή μόνιμη (για το



χρονικό διάστημα, που πραγματοποιούμε το πείραμα). Δίνονται ακόμη $g=10\text{m/s}^2$ και $p_{\text{ατμ}}=10^5\text{Pa}$, ενώ η θερμοκρασία του εγκλωβισμένου αέρα παραμένει σταθερή. Υπενθυμίζεται δε και ο νόμος του Boyle!!! Για μια ποσότητα αερίου σε σταθερή θερμοκρασία $pV=\text{σταθ}$.

Απάντηση:

- i) Τα σημεία Β, Γ και Δ βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο εντός του υγρού, οπότε για τις πιέσεις ισχύει:

$$p_B = p_\Gamma = p_\Delta$$

$$\text{Αλλά } p_B = p_{\text{ατμ}} + \rho g H = 10^5 \text{ Pa} + 1.000 \cdot 10 \cdot 1,25 \text{ Pa} = 1,125 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

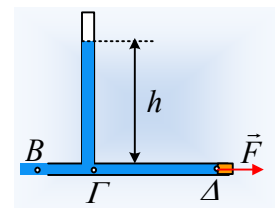
Οπότε η τάπα δέχεται οριζόντια δύναμη, όπως στο σχήμα, μέτρου:

$$F = p_\Delta \cdot A = 1,125 \cdot 10^5 \cdot 0,4 \cdot 10^{-4} \text{ N} = 4,5 \text{ N}$$

Εξάλλου $p_\Gamma = p_{\text{αερ}} + \rho g h$, όπου $p_{\text{αερ}}$ η πίεση του αερίου στον κατακόρυφο σωλήνα, πάνω από το νερό, οπότε:

$$p_{\text{αερ}} = p_\Gamma - \rho g h = 1,125 \cdot 10^5 \text{ Pa} - 1.000 \cdot 10 \cdot 1 \text{ Pa} = 1,025 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

- ii) Θεωρώντας μόνιμη στρωτή ροή ιδανικού ρευστού, με εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli ανάμεσα σε ένα σημείο της επιφάνειας του νερού στο δοχείο Κ και του άκρου Δ,



παίρνουμε:

$$p_{at} + \rho g H + \frac{1}{2} \rho v_K^2 = p_{at} + \frac{1}{2} \rho v_{\Delta}^2 \rightarrow$$
$$v_{\Delta} = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1,25} \text{ m/s} = 5 \text{ m/s}$$

Αφού θεωρούμε πολύ μεγάλη την ελεύθερη επιφάνεια του νερού, με αποτέλεσμα $v_K \approx 0$.

Σημείωση: Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν παίρναμε το θεώρημα του Torricelli...)

Αλλά τότε η παροχή του σωλήνα είναι ίση:

$$\Pi = A \cdot v = 0,4 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \text{ m}^3/\text{s} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} = 20 \text{ L/s}$$

Αξίζει να προσέξετε την πολύ μεγάλη παροχή που υπολογίσαμε, αλλά ας μην ξεχνάμε ότι μιλάμε για ιδανικό ρευστό!!!

iii) Η εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των διατομών Γ και Δ του οριζώντιου σωλήνα, μας δίνει:

$$v_{\Gamma} \cdot A_{\Gamma} = v_{\Delta} \cdot A_{\Delta} \rightarrow v_{\Gamma} = v_{\Delta} = 5 \text{ m/s}$$

Αλλά τότε από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ Γ και Δ έχουμε:

$$p_{\Gamma} + \frac{1}{2} \rho v_{\Gamma}^2 = p_{\Delta} + \frac{1}{2} \rho v_{\Delta}^2 \rightarrow p_{\Gamma} = p_{\Delta} = p_{at}$$

Αλλά το σημείο Γ βρίσκεται στο κάτω τμήμα του κατακόρυφου σωλήνα που περιέχει υγρό σε ισορροπία, οπότε:

$$p_{\Gamma} = p_{1\alpha\epsilon\rho} + \rho g h_1 \quad (1)$$

Όπου h_1 το νέο ύψος του νερού στο σωλήνα.

Αφού η θερμοκρασία του εγκλωβισμένου αέρα παραμένει σταθερή, μεταξύ της αρχικής ποσότητας του αέρα και της τελικής, ισχύει ο νόμος Boyle:

$$p_{\alpha\epsilon\rho} \cdot V_{\alpha\rho\chi} = p_{1\alpha\epsilon\rho} \cdot V_1 \rightarrow p_{\alpha\epsilon\rho} \cdot A_1 \cdot y = p_{1\alpha\epsilon\rho} \cdot A_1 \cdot y_1 \rightarrow$$

$$p_{1\alpha\epsilon\rho} = p_{\alpha\epsilon\rho} \cdot \frac{y}{y_1} \quad (2)$$

Όπου $y = H - h = 0,25 \text{ m}$, ενώ $h_1 = H - y_1$ και με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

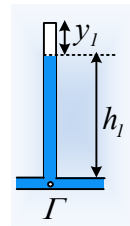
$$p_{\Gamma} = p_{\alpha\epsilon\rho} \cdot \frac{y}{y_1} + \rho g (H - y_1) \quad (3) \rightarrow$$

$$10^5 = 1,025 \cdot 10^5 \frac{0,25}{y_1} + 1.000 \cdot 10 \cdot (1,25 - y_1) \rightarrow$$

$$y_1^2 + 8,75 y_1 - \frac{10,25}{4} = 0 \quad (4)$$

Η λύση της οποίας δίνει $y_1 \approx 0,28 \text{ m}$ οπότε $h_1 = H - y_1 = 97 \text{ cm}$.

iv) Δουλεύοντας ξανά όπως στο ερώτημα ii) παίρνουμε με εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli



ανάμεσα σε ένα σημείο της επιφάνειας του νερού στο δοχείο Κ και του άκρου Δ, παίρνουμε:

$$p_{at} + \rho g(H + d) + \frac{1}{2} \rho v_K^2 = p_{at} + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \rightarrow$$
$$v_1 = \sqrt{2g(H + d)} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1,8} \text{ m/s} = 6 \text{ m/s}$$

Η εξίσωση της συνέχειας μεταξύ Γ και Δ δίνει ξανά $v_1 = v_1 = 6 \text{ m/s}$ και εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli μεταξύ Γ και Δ έχουμε:

$$p'_\Gamma + \rho g d + \frac{1}{2} \rho v_\Gamma^2 = p_\Delta + \frac{1}{2} \rho v_\Delta^2 \rightarrow p'_\Gamma = p_{at} - \rho g d \text{ ή}$$

$$p'_\Gamma = 10^5 \text{ Pa} - 1.000 \cdot 10 \cdot 0,55 \text{ Pa} = 0,945 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Αν ονομάσουμε y_2 το νέο ύψος του αέρα στον κατακόρυφο σωλήνα, με αντικατάσταση στην (3), έχουμε:

$$p'_\Gamma = p_{atm} \cdot \frac{y}{y_2} + \rho g(H - y_2) \rightarrow$$
$$0,945 \cdot 10^5 = 1,025 \cdot 10^5 \frac{0,25}{y_2} + 1.000 \cdot 10 \cdot (1,25 - y_2) \rightarrow$$

$$y_2^2 + 8,2y_2 - \frac{10,25}{4} = 0 \quad (4\alpha)$$

Η λύση της οποίας δίνει $y_2 = 0,3 \text{ m}$, οπότε $h_2 = H - y_2 = 95 \text{ cm}$.

Υλικό Φυσικής-Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης