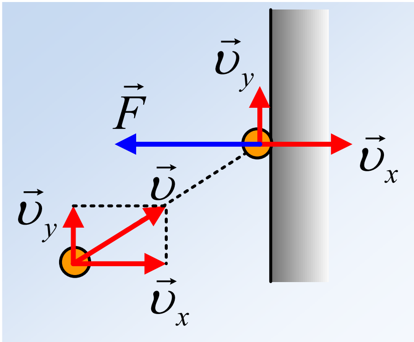
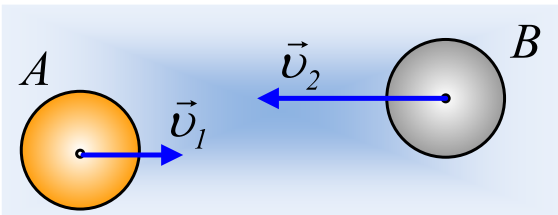
Φ.Ε: ΚΡΟΥΣΕΙΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΜΕΤΩΠΙΚΕΣ και ΜΗ

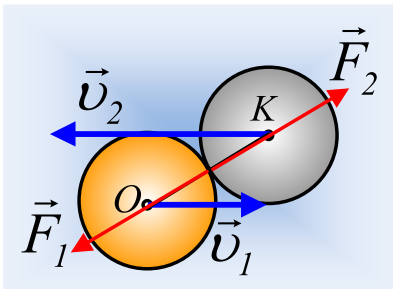
Ας ξεκινήσουμε με την περίπτωση όπου μια μικρή σφαίρα συγκρούεται **ελαστικά** με τοίχο. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι δεν εμφανίζεται τριβή μεταξύ της σφαίρας και του τοίχου, οπότε η **δύναμη που δέχεται η σφαίρα από τον τοίχο, είναι κάθετη σε αυτόν, μεταβάλλοντας την συνιστώσα $\vec{\upsilon}_x$ της ταχύτητας,** αφήνοντας ανεπηρέαστη την συνιστώσα $\vec{\upsilon}_y$, την παράλληλη στην επιφάνεια επαφής.



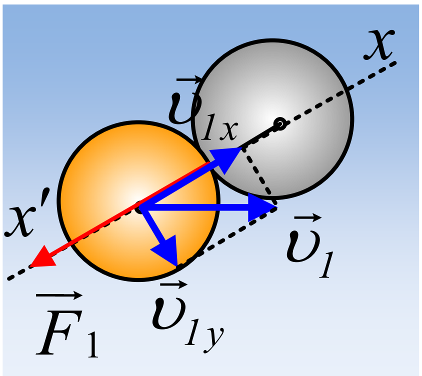
Ας συνεχίσουμε με την κρούση μεταξύ δύο μικρών σφαιρών, οι οποίες εκτελούν μεταφορική κίνηση. Όταν εξετάζουμε **ελαστική κρούση μεταξύ δύο σφαιρών, δεχόμαστε ότι δεν αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής μεταξύ των σφαιρών στη διάρκεια της κρούσης**.

Κατά την ελαστική κρούση, **αναπτύσσονται δυνάμεις επαφής, οι οποίες διέρχονται από τα κέντρα μάζας των σφαιρών**. Στην περίπτωση λοιπόν της ελαστικής κρούσης, οι δυνάμεις επαφής μεταξύ των σφαιρών βρίσκονται πάνω στη διάκεντρο των σφαιρών κατά τη διάρκεια της κρούσης.

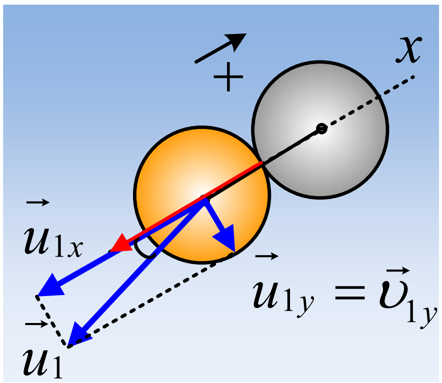




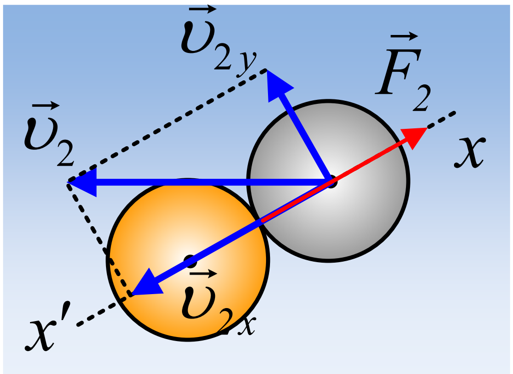
Αναλύοντας λοιπόν τις ταχύτητες των σφαιρών σε συνιστώσες, $\vec{\upsilon}_x$ στη διεύθυνση της διακέντρου και $\vec{\upsilon}_y$ σε διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση της διακέντρου, **μεταβολή ορμής για κάθε σφαίρα συμβαίνει μόνο κατά τη διεύθυνση της διακέντρου,** δηλαδή **μεταβάλλονται μόνο** οι $\vec{\upsilon}_x$ συνιστώσες των ταχυτήτων, ενώ οι $\vec{\upsilon}_y$ συνιστώσες **παραμένουν αμετάβλητες**.



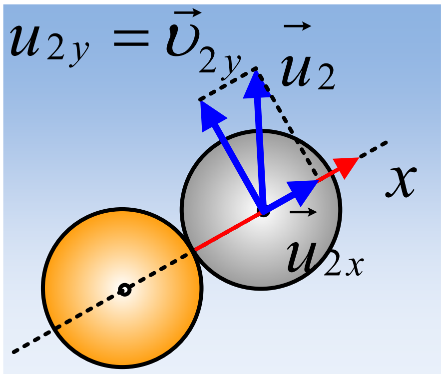
οριακά πριν την κρούση



αμέσως μετά την κρούση



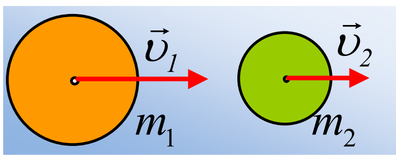
οριακά πριν την κρούση



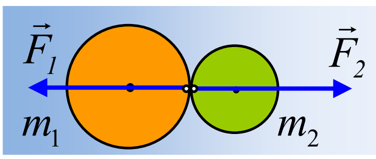
αμέσως μετά την κρούση

Ι) Κρούσεις ελαστικές μετωπικές

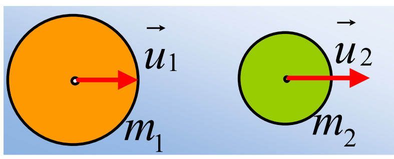
Σε μια κρούση ***μετωπική-ελαστική*** μεταξύ δύο σφαιρών, αφενός ***οι ταχύτητες των σφαιρών πριν την κρούση βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία***, που δεν είναι άλλη από τη ***διάκεντρο των σφαιρών***, αφετέρου η ***κινητική ενέργεια του συστήματος*** των δύο σφαιρών ***διατηρείται σταθερή πριν και μετά*** την κρούση. Εφόσον ***οι δυνάμεις επαφής μεταξύ των σφαιρών*** κατά τη διάρκεια της κρούσης, ***βρίσκονται πάνω στη διάκεντρο των σφαιρών***, μεταβολή ορμής για κάθε σφαίρα έχουμε μόνο πάνω στη διεύθυνση της διακέντρου, με αποτέλεσμα και ***οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση***, ***να βρίσκονται επίσης πάνω στη διεύθυνση της διακέντρου.***



Κάτοψη



κάτοψη



κάτοψη

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δύο λείες, ομογενείς σφαίρες με μάζες m_1 και m_2, κινούνται χωρίς να περιστρέφονται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Οι ***ταχύτητες των σφαιρών*** $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$ ***βρίσκονται πάνω στη διάκεντρο των σφαιρών,*** οπότε οι σφαίρες συγκρούονται μετωπικά.

Α) Να δείξετε ότι, αν ισχύει η σχέση: $\upsilon_1 + u_1 = u_2 + \upsilon_2$, στην οποία τα σύμβολα υ_1, υ_2 και u_1, u_2 παριστάνουν τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων πριν και μετά την κρούση αντίστοιχα, τότε η κρούση θα είναι ελαστική.

Απόδειξη

Εφόσον οι ταχύτητες των σφαιρών ***πριν και μετά την κρούση είναι συγγραμμικές***, από τη διατήρηση της ορμής του συστήματος των δύο σφαιρών, έχουμε:

$$\mathrm{m}_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = \mathrm{m}_1 u_1 + m_2 u_2 \Rightarrow \mathrm{m}_1(\upsilon_1 - u_1) = m_2(u_2 - \upsilon_2) \quad (1)$$

Επιπλέον ισχύει ότι: $\upsilon_1 + u_1 = u_2 + \upsilon_2 \quad (2)$

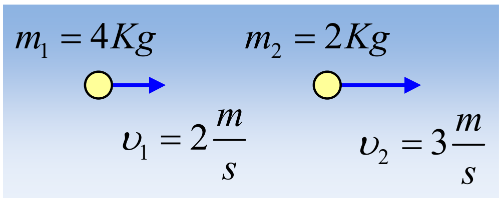
Πολλαπλασιάζοντας τις δύο σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$\mathrm{m}_1(\upsilon_1 - u_1)(\upsilon_1 + u_1) = m_2(u_2 - \upsilon_2)(u_2 + \upsilon_2) \Rightarrow m_1(\upsilon_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - \upsilon_2^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 \Rightarrow K_{tot(\pi\rho\iota\nu)} = K_{tot(\mu\varepsilon\tau\alpha)}$$

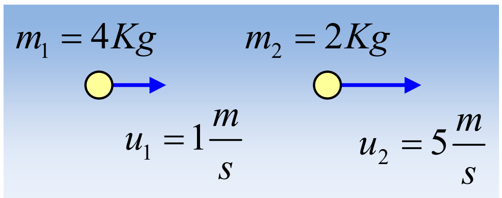
Συμπέρασμα: Σε κάθε κρούση ***μετωπική και ελαστική***, ισχύει η σχέση $\upsilon_1 + u_1 = u_2 + \upsilon_2$

Β) Ποιες από τις επόμενες μετωπικές κρούσεις ***δεν*** μπορούν να πραγματοποιηθούν, ποιες είναι ***μετωπικές ανελαστικές*** και ποιες ***μετωπικές ελαστικές;*** Δικαιολογείστε πλήρως την απάντησή σας

Ι)

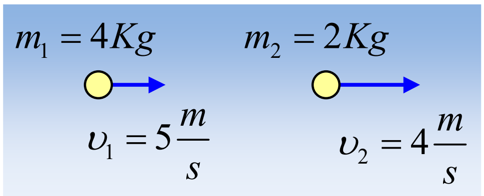


Πριν

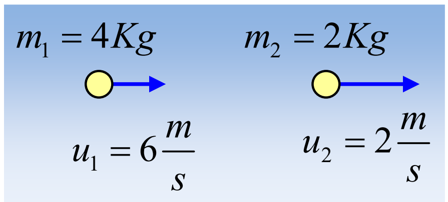


Μετά

II)

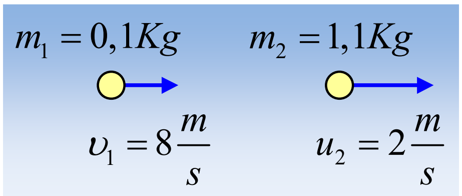


Πριν

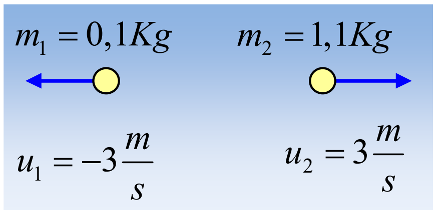


Μετά

III)

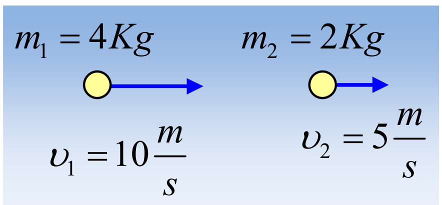


Πριν

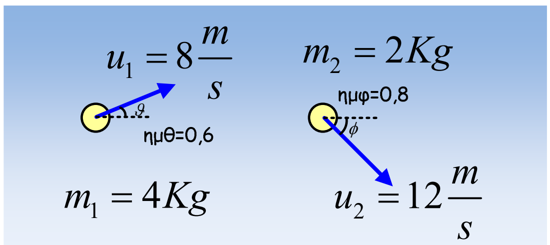


Μετά

IV)



Πριν

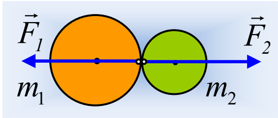


Μετά

Απάντηση

Στην (I) δεν θα υπάρξει κρούση, αφού η σφαίρα m_1 δεν θα φθάσει ποτέ την m_2 αφού $\upsilon_1 < \upsilon_2$.

Η (ΙΙ) δεν μπορεί να γίνει, αφού η σφαίρα m_1 αποκτά κατά την κρούση ταχύτητα $u_1 > \upsilon_1$, ενώ η δύναμη που δέχεται κατά την κρούση την επιβραδύνει



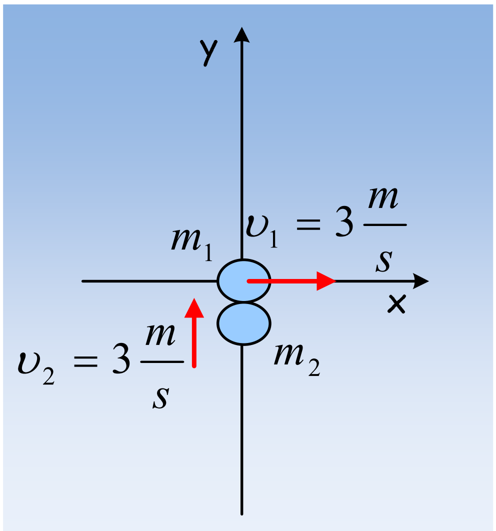
Η (ΙΙΙ) μπορεί να γίνει και είναι μετωπική ελαστική, αφού διατηρείται η ορμή μια και ισχύει:

$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1u_1 + m_2u_2$ ενώ επιπλέον ισχύει ότι: $\upsilon_1 + u_1 = u_2 + \upsilon_2$

Τέλος η (IV) ***δεν μπορεί*** να γίνει αφού οι σφαίρες ***έχουν μετά την κρούση, ταχύτητες σε διαφορετική διεύθυνση από τη διάκεντρο,*** ενώ γνωρίζουμε ότι ***οι δυνάμεις επαφής μεταξύ των σφαιρών*** κατά τη διάρκεια της κρούσης, ***βρίσκονται πάνω στη διάκεντρο των σφαιρών***, οπότε μεταβολή ορμής για κάθε σφαίρα έχουμε μόνο πάνω στη διεύθυνση της διακέντρου, με αποτέλεσμα και ***οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση***, ***να βρίσκονται επίσης πάνω στη διεύθυνση της διακέντρου.***

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2 - ΚΡΟΥΣΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΠΛΑΓΙΑ (μη ΜΕΤΩΠΙΚΗ)

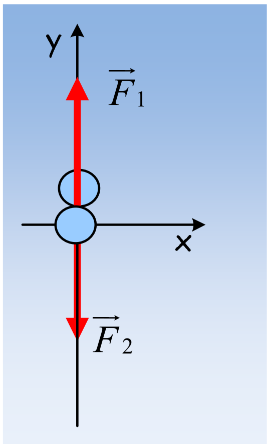
Δύο λείες και ελαστικές σφαίρες, μάζας m_1=1 Kg και m_2=2 Kg κινούνται με ταχύτητες ίσων μέτρων $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 3\frac{m}{s}$. Οι σφαίρες συγκρούονται ελαστικά και οι διευθύνσεις των ταχυτήτων τη στιγμή της κρούσης είναι κάθετες μεταξύ τους.



Να βρείτε τις ταχύτητες των σφαιρών αμέσως μετά την κρούση

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Εφόσον η κρούση είναι ελαστική, **αναπτύσσονται δυνάμεις επαφής, οι οποίες διέρχονται από τα κέντρα μάζας των σφαιρών**, οπότε οι δυνάμεις επαφής μεταξύ των σφαιρών βρίσκονται πάνω στη διάκεντρο των σφαιρών κατά τη διάρκεια της κρούσης, η οποία συμπίπτει με τον άξονα y'y:



Μεταβολή ορμής για κάθε σφαίρα θα έχουμε μόνο στον άξονα y'y, ενώ οι συνιστώσες $\vec{\upsilon}_x$ των ταχυτήτων διατηρούνται αμετάβλητες: $u_{1x} = \upsilon_1 = 3\frac{m}{s}$ και $u_{2x} = \upsilon_{2x} = 0$

Η πρόβλεψη:

Στον άξονα y'y η κρούση είναι μετωπική ελαστική με τη σφαίρα μάζας m_1 ακίνητη πριν την κρούση. Οι συνιστώσες $\vec{u}_y$ των ταχυτήτων μπορεί να υπολογιστούν από τις γνωστές σχέσεις:

$$u_{2y} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\upsilon_2 \quad \text{και} \quad u_{1y} = \frac{2m_2}{m_2 + m_1}\upsilon_2$$

Η επιβεβαίωση:

Λόγω της ΑΔΟ έχουμε: $0 + m_2\upsilon_2 = m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y} \Rightarrow m_2(\upsilon_2 - u_{2y}) = m_1 u_{1y}$

Εφόσον η κρούση είναι ελαστική ισχύει:

$$K_{tot(\pi\rho\iota\nu)} = K_{tot(\mu\varepsilon\tau\alpha)} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 \xrightarrow{u_{2x}=0}$$
$$\Rightarrow m_1\upsilon_1^2 + m_2\upsilon_2^2 = m_1(u_{1x}^2 + u_{1y}^2) + m_2 u_{2y}^2 \xrightarrow{\upsilon_1 = u_{1x}}$$
$$\Rightarrow m_2\upsilon_2^2 = m_1 u_{1y}^2 + m_2 u_{2y}^2 \Rightarrow m_2(\upsilon_2 - u_{2y})(\upsilon_2 + u_{2y}) = m_1 u_{1y}^2$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις έχουμε: $\upsilon_2 + u_{2y} = u_{1y}$

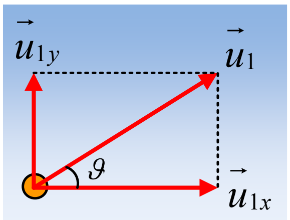
Αντικαθιστώντας τη σχέση αυτή στην εξίσωση της ΑΔΟ έχουμε:

$$m_2\upsilon_2 = m_1(\upsilon_2 + u_{2y}) + m_2u_{2y} \Rightarrow m_2\upsilon_2 - m_1\upsilon_2 = m_1u_{2y} + m_2u_{2y} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m_2 - m_1)\upsilon_2 = (m_2 + m_1)u_{2y} \Rightarrow u_{2y} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\upsilon_2 \Rightarrow u_{2y} = \frac{2-1}{2+1}\cdot 3\frac{m}{s} \Rightarrow u_{2y} = 1\frac{m}{s}$$

Επίσης:

$$u_{1y} = \upsilon_2 + u_{2y} = \upsilon_2 + \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\upsilon_2 \Rightarrow u_{1y} = \frac{2m_2}{m_2 + m_1}\upsilon_2 \Rightarrow u_{1y} = 4\frac{m}{s}$$

Δηλαδή, η σφαίρα μάζας m_2 συνεχίζει να κινείται στον άξονα y’y κατά την ίδια φορά με ταχύτητα μέτρου $u_2 = u_{2y} = 1\frac{m}{s}$, ενώ η σφαίρα μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα $\vec{u}_1$ η οποία αναλύεται σε δύο κάθετες συνιστώσες με μέτρα: $u_{1x} = \upsilon_1 = 3\frac{m}{s}$ και $u_{1y} = 4\frac{m}{s}$



Το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας μάζας m_1 είναι ίσο με:

$$u_1 = \sqrt{u_{1x}^2 + u_{1y}^2} \Rightarrow u_1 = \sqrt{3^2 + 4^2}\,\frac{m}{s} \Rightarrow u_1 = 5\frac{m}{s}$$

ενώ το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{u}_1$ σχηματίζει με τον άξονα x γωνία θ με:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{u_{1y}}{u_{1x}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{4}{3}$$

Η μεταβολή ορμής για τη σφαίρα μάζας m_1 είναι:

$$\Delta\vec{p}_1 = \Delta\vec{p}_{1x} + \Delta\vec{p}_{1y} \xrightarrow{\Delta\vec{p}_{1x}=0} \Delta\vec{p}_1 = \Delta\vec{p}_{1y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta p_1 = m_1 u_{1y} - 0 = m_1 u_{1y} \Rightarrow \Delta p_1 = 1\cdot 4 = 4\frac{Kg\cdot m}{s}$$

Ενώ η μεταβολή ορμής για τη σφαίρα μάζας m_2 είναι:

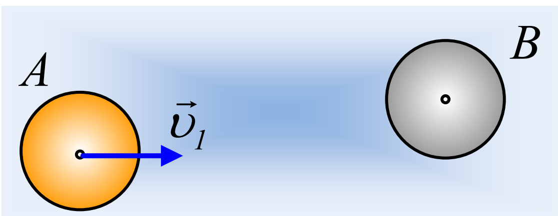
$$\Delta\vec{p}_2 = \Delta\vec{p}_{2x} + \Delta\vec{p}_{2y} \xrightarrow{\Delta\vec{p}_{2x}=0} \Delta\vec{p}_2 = \Delta\vec{p}_{2y} \Rightarrow$$

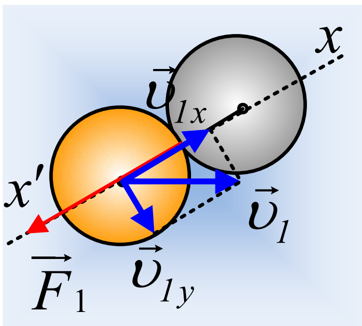
$$\Rightarrow \Delta p_2 = m_2(u_{2y} - \upsilon_2) \Rightarrow \Delta p_2 = 2\cdot(1-3) = -4\frac{Kg\cdot m}{s}$$

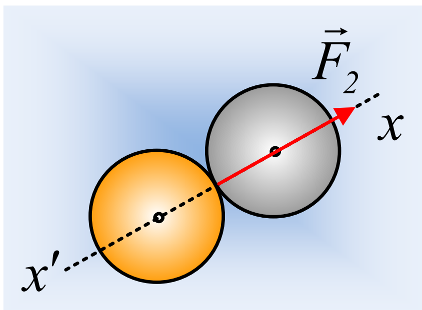
Δηλαδή $\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3 - ΚΡΟΥΣΗ ΕΚΚΕΝΤΡΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ

Να δείξετε ότι κατά την ελαστική έκκεντρη κρούση μεταξύ δύο σφαιρών ίσης μάζας, όπου η μία είναι ακίνητη πριν την κρούση, οι σφαίρες θα κινηθούν μετά την κρούση σε κάθετες διευθύνσεις





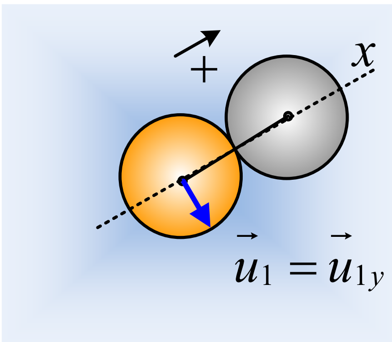


Η σφαίρα μάζας m_1 δέχεται δύναμη $\vec{F}_1$ πάνω στη διάκεντρο των σφαιρών, η οποία συμπίπτει με τον άξονα x'x. Συνεπώς μεταβολή ορμής άρα και ταχύτητας θα συμβεί μόνο στον άξονα x'x, δηλαδή στη διεύθυνση της διακέντρου. Η συνιστώσα ταχύτητας στον άξονα y'y, τον κάθετο στη διεύθυνση της διακέντρου, θα παραμείνει αμετάβλητη: $\vec{u}_{1y} = \vec{\upsilon}_{1y}$

Στον άξονα x'x έχουμε κρούση μετωπική ελαστική, μεταξύ σφαιρών ίσης μάζας, όπου η δεύτερη είναι αρχικά ακίνητη. Λόγω ανταλλαγής ταχυτήτων, σφαίρα μάζας m_1 μετά την κρούση θα έχει μηδενική ταχύτητα στον άξονα x'x: $u_{1x} = \upsilon_{2x} = 0$

Ισοδύναμα: $u_{1x} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_{1x} = 0$

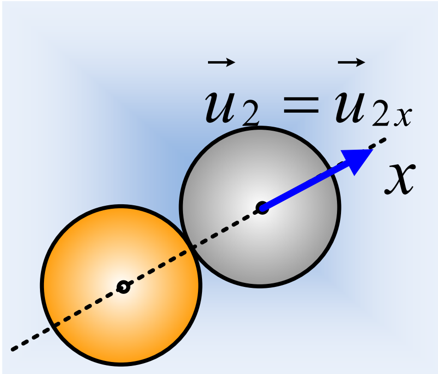
Άρα μετά την κρούση η σφαίρα μάζας m_1 έχει ταχύτητα $\vec{u}_1 = \vec{u}_{1y}$



Η σφαίρα μάζας m_2 δέχεται δύναμη $\vec{F}_2$ πάνω στη διάκεντρο των σφαιρών, η οποία συμπίπτει με τον άξονα x'x. Συνεπώς μεταβολή ορμής άρα και ταχύτητας θα συμβεί μόνο στον άξονα x'x, δηλαδή στη διεύθυνση της διακέντρου. Η συνιστώσα ταχύτητας στον άξονα y'y, τον κάθετο στη διεύθυνση της διακέντρου, θα παραμείνει αμετάβλητη: $\vec{u}_{2y} = \vec{\upsilon}_{2y} = \vec{0}$

Στον άξονα x'x έχουμε κρούση μετωπική ελαστική, μεταξύ σφαιρών ίσης μάζας, όπου η δεύτερη είναι αρχικά ακίνητη: $u_{2x} = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_{1x} = \upsilon_{1x}$

Άρα μετά την κρούση η σφαίρα μάζας m_2 έχει ταχύτητα $\vec{u}_2 = \vec{u}_{2x}$



Συνεπώς μετά την ελαστική έκκεντρη κρούση μεταξύ δύο σφαιρών ίσης μάζας, όπου η μία είναι ακίνητη πριν την κρούση, οι σφαίρες θα κινηθούν μετά την κρούση σε κάθετες διευθύνσεις.

Υλικό Φυσικής-Χημείας
Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…
Επιμέλεια:
Θοδωρής Παπασγουρίδης