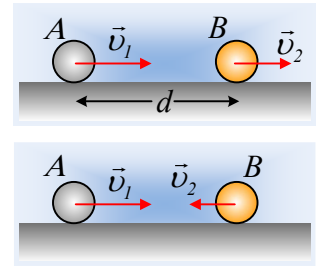


Οι ταχύτητες σε ελαστικές κρούσεις.

Οι σφαίρες Α και Β του διπλανού σχήματος, με ίσες ακτίνες και μάζες m και $3m$ αντίστοιχα, κινούνται στην ίδια ευθεία, σε λείο οριζόντιο επίπεδο, με ταχύτητες v_1 και $v_2=4\text{m/s}$, χωρίς να στρέφονται. Κάποια στιγμή $t=0$, οι σφαίρες απέχουν κατά $d=8\text{m}$, ενώ μετά την κεντρική και ελαστική μεταξύ τους κρούση, η Α σφαίρα ακινητοποιείται.



i) Να βρεθεί η ταχύτητα v_1 της Α σφαίρας.

ii) Πόσο απέχουν οι σφαίρες μεταξύ τους τη στιγμή $t_1=3\text{s}$, αν η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα;

iii) Να υπολογιστούν οι ταχύτητες των δύο σφαιρών μετά την κρούση, αν η σφαίρα Α είχε ταχύτητα:

α) $v_1=6\text{m/s}$ και β) $v_1=16\text{m/s}$.

iv) Αν οι δυο σφαίρες κινούνται αντίθετα, όπως στο δεύτερο σχήμα, με τη Β να έχει ταχύτητα μέτρου 4m/s , να υπολογιστεί η ταχύτητα της Α σφαίρας, αν μετά την κρούση, η Β παραμένει ακίνητη.

Απάντηση:

Οι ταχύτητες των σφαιρών μετά από την κεντρική και ελαστική μεταξύ τους κρούση, δίνονται από τις εξισώσεις:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad (1) \quad \text{και} \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \quad (2)$$

i) Με αντικατάσταση των τιμών στην (1) θέτοντας $v_1'=0$, παίρνουμε:

$$0 = \frac{m - 3m}{m + 3m} v_1 + \frac{2 \cdot 3m}{m + 3m} 4 \rightarrow v_1 = 12\text{m/s}$$

ii) Έστω ότι η κρούση πραγματοποιείται τη στιγμή t' όπου το Α σώμα έχει μετατοπισθεί κατά $\Delta x_1 = v_1 t'$, ενώ το Β κατά $\Delta x_2 = v_2 t'$. Με βάση το σχήμα έχουμε:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 + d \rightarrow$$

$$v_1 t' = v_2 t' + d \rightarrow t' = \frac{d}{v_1 - v_2} \rightarrow$$

$$t' = \frac{8}{12 - 4} \text{s} = 1\text{s}$$

Εξάλλου η σφαίρα Β, με βάση την (2), αποκτά ταχύτητα μετά την κρούση:

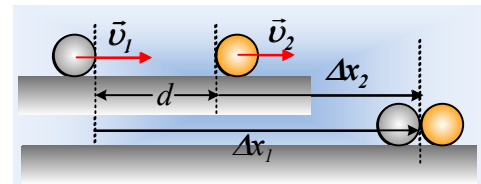
$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{2m}{4m} 12\text{m/s} + \frac{3m - m}{4m} 4\text{m/s} = 8\text{m/s}$$

Ενώ θα κινηθεί για χρονικό διάστημα $\Delta t = t_1 - t' = 2\text{s}$, διανύοντας απόσταση $d_2 = v_2' \cdot \Delta t = 8 \cdot 2\text{m} = 16\text{m}$.

Αφού το Α είναι ακίνητο, αυτή θα είναι και απόσταση μεταξύ των δύο σφαιρών τη στιγμή t_1 .

iii) Με αντικατάσταση στις (1) και (2) παίρνουμε:

α) Αν $v_1=6\text{m/s}$:



$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{m - 3m}{m + 3m} 6m/s + \frac{2 \cdot 3m}{m + 3m} 4m/s = 3m/s$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{2m}{m + 3m} 6m/s + \frac{3m - m}{m + 3m} 4m/s = 5m/s$$

β) Αν $v_1 = 16m/s$:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{m - 3m}{m + 3m} 16m/s + \frac{2 \cdot 3m}{m + 3m} 4m/s = -2m/s \text{ και}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{2m}{4m} 16m/s + \frac{3m - m}{4m} 4m/s = 10m/s$$

iv) Αντικαθιστώντας στην (2) $v_2 = -4m/s$, θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική και $v_2' = 0$, παίρνουμε:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \rightarrow 0 = \frac{2m}{4m} v_1 + \frac{3m - m}{4m} (-4) \rightarrow$$

$$v_1 = 4m/s$$

Σχόλια.

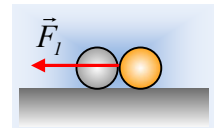
Στην πρώτη κρούση, η μικρή σφαίρα ακινητοποιείται κινούμενη με ταχύτητα $12m/s$. Αν η ταχύτητά της ήταν μικρότερη από την τιμή αυτή, τότε θα συνέχισε να κινείται προς την ίδια κατεύθυνση. Αν ήταν μεγαλύτερη (π.χ. $16m/s$) τότε αποκτά ταχύτητα αντίθετης φοράς. Υπεύθυνη για την αλλαγή της ορμής της, είναι η δύναμη F_1 που δέχεται από την δεύτερη σφαίρα. Προσοχή όμως, η δύναμη αυτή δεν είναι σε κάθε περίπτωση η ίδια. Αν και μεταβλητή, η μέγιστη τιμή της εξαρτάται από τη διαφορά $v_1 - v_2$ (δηλαδή τη σχετική ταχύτητα μεταξύ των δύο σφαιρών)

Τα αποτελέσματα αυτά, δεν πρέπει να συγχέονται με τα αποτελέσματα στην περίπτωση που η Β σφαίρα ήταν ακίνητη, όπου εκεί καθοριστικό λόγο παίζουν μόνο οι μάζες.

Για καθηγητές:

Τα πράγματα γίνονται σαφέστερα αν η μελέτη γίνει από κινούμενο παρατηρητή με ταχύτητα $u = v_2 = 4m/s$, οπότε έχουμε κρούση της σφαίρας Α με ταχύτητα $u_1 = 8m/s$ με ακίνητη σφαίρα τριπλάσιας μάζας. Έτσι μετά την κρούση η Α κινείται ως προς τον παρατηρητή με ταχύτητα $u_1' = -4m/s$, ενώ η Β με ταχύτητα $u_2' = 4m/s$, τιμές που μπορούν να προκύψουν από τις εξισώσεις που θα έγραφε για την κρούση:

$$u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \quad \text{και} \quad u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1$$



Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιάζεισαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης