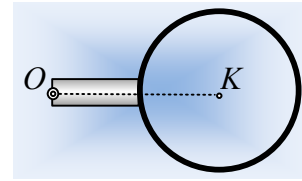


Εσωτερικές δυνάμεις και ροπές.

Μια ομογενής ράβδος μήκους $\ell=1\text{m}$ και μάζας $M=6\text{kg}$ μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της O . Στο άλλο άκρο της ράβδου προσκολλάται μια στεφάνη Σ , μάζας $m=0,6\text{kg}$ και ακτίνας $R=1\text{m}$, οπότε έτσι δημιουργούμε ένα στερεό s . Φέρνουμε το στερεό σε θέση τέτοια, ώστε η ράβδος να είναι οριζόντια και το αφήνουμε να κινηθεί.



- i) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του στερεού s , ως προς τον άξονα περιστροφής του.
- ii) Να βρεθεί η αρχική γωνιακή επιτάχυνση του στερεού, καθώς και η αρχική επιτάχυνση του κέντρου K της στεφάνης.
- iii) Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκείται στην στεφάνη από τη δοκό, στην παραπάνω θέση.
- iv) Υποστηρίζεται ότι στη στεφάνη, εκτός της παραπάνω δύναμης ασκείται και κάποια επιπλέον ροπή από τη δοκό. Να εξετάσετε την ορθότητα ή μη της παραπάνω θέσης.
- v) Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στο στερεό s από την άρθρωση, μόλις αφεθεί να κινηθεί.
- vi) Να εξετάσετε αν η στεφάνη, πέρα από την άσκηση δύναμης, ασκεί επιπλέον και κάποια ροπή στη ράβδο.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα περιστροφής ο οποίος περνά από το μέσον της $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} M\ell^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

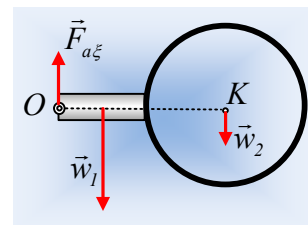
Απάντηση:

- i) Για τη ροπή αδράνειας του στερεού το οποίο αποτελείται από τη ράβδο και τη στεφάνη θα έχουμε ότι $I_s = I_1 + I_2'$ όπου I_1 η ροπή αδράνειας που οφείλεται στη ράβδο και I_2' η ροπή αδράνειας η οποία οφείλεται στη στεφάνη. Έτσι έχουμε:

$$I_s = \left(\frac{1}{12} M\ell^2 + M \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \right) + (mR^2 + m(\ell + R)^2) = \frac{1}{3} M\ell^2 + 5m\ell^2 \rightarrow$$

$$I_s = \frac{1}{3} 6 \cdot 1^2 \text{ kgm}^2 + 5 \cdot 0,6 \cdot 1^2 \text{ kgm}^2 = 5 \text{ kgm}^2.$$

- ii) Στο σχήμα φαίνονται οι (εξωτερικές) δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό s , μόλις αφεθεί να κινηθεί. Με εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα παίρνουμε:



$$\Sigma \tau = I_s a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow w_1 \cdot \frac{\ell}{2} + w_2 \cdot (\ell + R) = I_s a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{Mg\ell + 2mg \cdot (\ell + R)}{2I_s} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 1 + 2 \cdot 0,6 \cdot 10(1+1)}{2 \cdot 5} \text{ rad/s}^2 = 8,4 \text{ rad/s}^2.$$

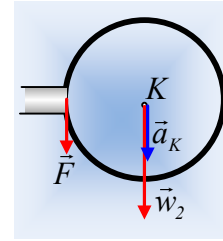
Αλλά τότε το κέντρο K της στεφάνης, αποκτά επιτάχυνση, κατακόρυφη, όπως στο παρακά-

τω σχήμα με μέτρο:

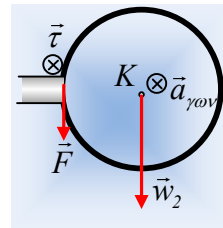
$$\alpha_K = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot (\ell + R) = 8,4 \cdot 2m / s^2 = 16,8m / s^2.$$

- iii) Οι δυνάμεις που ασκούνται στη στεφάνη είναι το βάρος w_2 και μια δύναμη από τη σανίδα F , ενώ από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για την κίνηση του κέντρου μάζας της ($\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_{cm}$) η επιτάχυνση έχει την κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης. Αλλά τότε και η δύναμη από τη ράβδο είναι κατακόρυφη, οπότε:

$$F + mg = m\alpha_K \rightarrow F = m(\alpha_K - g) = 0,6 \cdot (16,8 - 10)N = 4,08N.$$



- iv) Εστιάζουμε την προσοχή μας στη στεφάνη. Μόλις αφηθεί το στερεό s να κινηθεί αποκτά τη γωνιακή επιτάχυνση, που υπολογίσαμε παραπάνω. Την ίδια γωνιακή επιτάχυνση αποκτά και η στεφάνη, κάθετη στο επίπεδο του σχήματος, με φορά προς τα μέσα, όπως στο σχήμα. Βλέπετε κάποια ροπή (των δυνάμεων που ασκούνται στη σφαίρα), υπεύθυνη για αυτή τη γωνιακή επιτάχυνση; Προφανώς ροπή ως προς το K, έχει μόνο η δύναμη F , αλλά η ροπή αυτή, αριστερόστροφη, θα μπορούσε να προσδώσει γωνιακή επιτάχυνση, αντίθετης κατεύθυνσης από αυτήν που αποκτά η στεφάνη. Συνεπώς είμαστε υποχρεωμένοι να δεχτούμε ότι η στεφάνη δέχεται και μια επιπλέον ροπή (ροπή ζεύγους) από τη ράβδο, κάθετη στο επίπεδο του σχήματος, με φορά προς τα μέσα, οπότε από το 2^ο νόμο της κίνησης για τη στεφάνη παίρνουμε:



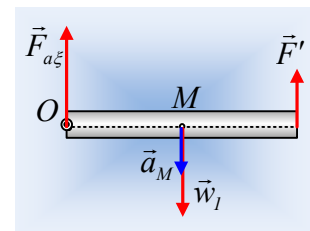
$$\Sigma \tau = I_K \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \tau - FR = mR^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$\tau = FR + mR^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} = (4,08 \cdot 1 + 0,6 \cdot 1^2 \cdot 8,4)Nm = 9,12Nm.$$

- v) Ερχόμαστε τώρα στη ράβδο. Και αυτή αποκτά την ίδια γωνιακή επιτάχυνση με το στερεό s, ενώ δέχεται από την σφαίρα μια κατακόρυφη δύναμη F' , την αντίδραση της F .

Το κέντρο μάζας της δοκού M, αποκτά κατακόρυφη επιτάχυνση, όπως στο σχήμα, μέτρο:

$$a_M = a_{\gamma\omega\nu} \frac{\ell}{2} = 8,4 \cdot 0,5m / s^2 = 4,2m / s^2.$$



Από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για την κίνηση του κέντρου μάζας της ($\Sigma \vec{F} = M\vec{a}_{cm}$) η επιτάχυνση του κέντρου μάζας M, έχει την κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης.

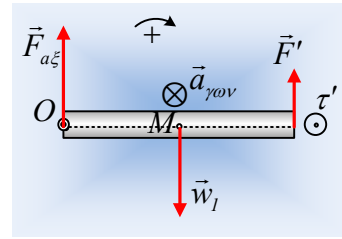
$$\Sigma \vec{F} = M\vec{a}_{cm} \rightarrow w_1 - F' - F_{a\xi} = M\vec{a}_{cm} \rightarrow$$

$$F_{a\xi} = Mg - F' - M\vec{a}_{cm} = 60N - 4,08N - 6 \cdot 4,2N = 30,72N$$

- vi) Έστω ότι η στεφάνη πέρα από την δύναμη F' ασκεί στη ράβδο και μια ροπή τ' . Εφαρμόζοντας για τη ράβδο το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφή της γύρω από οριζόντιο

άξονα που περνά από το κέντρο μάζας M , θεωρώντας θετική την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, έχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma \tau_M &= I_{cm} \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \\ F_{a\xi} \frac{\ell}{2} + \tau' - F' \frac{\ell}{2} &= \frac{1}{12} M \ell^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \\ \tau' &= \frac{1}{12} M \ell^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} - F_{a\xi} \frac{\ell}{2} + F' \frac{\ell}{2} \rightarrow \\ \tau' &= \frac{1}{12} 6 \cdot 1^2 \cdot 8,4 Nm - 30,72 \cdot 0,5 Nm + 4,08 \cdot 0,5 Nm = -9,12 Nm\end{aligned}$$



Δηλαδή η ράβδος δέχεται από την στεφάνη στο άκρο της, πέρα από την δύναμη F' και μια ροπή τ' με κατεύθυνση όπως στο σχήμα.

Σχόλια:

- Στο πρόβλημά μας, η στεφάνη είναι κολλημένη στο άκρο της ράβδου. Όσο λεπτή και να είναι η ράβδος, το σημείο συγκόλλησης δεν είναι μόνο ένα, ώστε να ασκηθεί μια μόνο δύναμη. Στην περίπτωση αυτή τα δύο στερεά αλληλεπιδρούν με μια κατανομή δυνάμεων και όχι με μια μόνο δύναμη. Η κατανομή αυτή είναι ισοδύναμη με μια δύναμη (η δύναμη F) και μία ροπή αλληλεπίδρασης (η ροπή τ , που υπολογίσαμε παραπάνω).
- Αξίζει να επισημανθεί ότι, όπως η αντίδραση της F , η F' , ασκείται στη ράβδο, το ίδιο συμβαίνει και με την αντίδραση της ροπής που ασκείται στη στεφάνη, της τ . Και αυτή, η ροπή τ' , ασκείται στη ράβδο, έχει το ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση με την τ . Με άλλα λόγια, ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα αναφέρεται σε δυνάμεις δράσης- αντίδρασης. Αλλά σε μια κατανομή δυνάμεων, όπως παραπάνω μεταξύ ράβδου και στεφάνης, όπου βρίσκουμε ροπή η οποία αποδίδεται σε ζεύγη δυνάμεων, πάντα έχουμε και ζευγάρια δράσης – αντίδρασης, συνεπώς και οι αντίστοιχες ροπές ικανοποιούν τον ίδιο νόμο. Ροπές αντίθετες, όπως παραπάνω υπολογίστηκαν ($\tau=+9,12Nm$ και $\tau'=-9,12Nm$)

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης