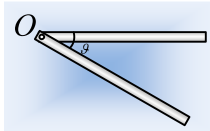
Μια απλή ή μήπως σύνθετη κίνηση;



Μια ομογενής ράβδος μάζας 3kg και μήκους 0,6m, μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος περνά από το ένα της άκρο Ο, χωρίς τριβές. Η ράβδος φέρεται σε οριζόντια θέση και αφήνεται να κινηθεί.

Η κίνηση που θα πραγματοποιήσει θα είναι απλή ή σύνθετη;

Δυο μαθητές, ο Αντώνης (Α) και ο Βασίλης (Β), διαφωνούν και προσπαθώντας να διαπιστώσουν το σωστό και το λάθος, αναλαμβάνουν να απαντήσουν στα ακόλουθα ερωτήματα, για τη στιγμή που η ράβδος βρίσκεται σε μια θέση, όπως στο σχήμα, σχηματίζοντας γωνία θ=30° με την οριζόντια θέση:

i) Ποια η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου;

ii) Ποια είναι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας Κ (η κάθετη στη ράβδο) και ποια η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου;

iii) Πόση είναι η στροφορμή και ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής κατά (ως προς) τον οριζόντιο άξονα περιστροφής της στο Ο;

iv) Πόση είναι η στροφορμή και ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής κατά (ως προς) τον οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το μέσον της Κ;

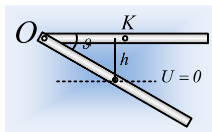
Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I = Ml^2/12$ και $g=10m/s^2$.

Απαντήσεις.

Ο Αντώνης υποστηρίζει ότι η ράβδος εκτελεί απλή κίνηση. Η ράβδος περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, ο οποίος περνά από το άκρο Ο της ράβδου. Αντίθετα ο Βασίλης υποστηρίζει ότι η κίνηση είναι σύνθετη. Μια μεταφορική του κέντρου μάζας Κ και μια στροφική γύρω από νοητό οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του Κ. Ο καθένας με βάση την δική του θεώρηση, υπολογίζει:

i) Α) Ο Αντώνης: Υπολογίζουμε αρχικά τη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα στο Ο:

$$I_o = I_{cm} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + \frac{1}{4}M\ell^2 = \frac{1}{3}M\ell^2 = \frac{1}{3}3\cdot 0{,}6^2\,kgm^2 = 0{,}36\,kgm^2.$$



Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης, όπου U=0 και έχουμε:

$$K_{αρ} + U_{αρ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

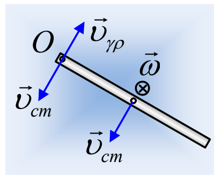
$$0 + Mgh = \frac{1}{2}I_o\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2Mgh}{I_o}} = \sqrt{\frac{Mg\ell\cdot ημ\vartheta}{I_o}} \rightarrow$$

$$\omega=\sqrt{\frac{Mg\ell\cdot\eta\mu\vartheta}{I_o}}=\sqrt{\frac{3\cdot 10\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5}{0{,}36}}rad/s=5rad/s$$

Β) Ο Βασίλης: Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης, όπου U=0 και έχουμε:

$$K_{\alpha\rho}+U_{\alpha\rho}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow$$

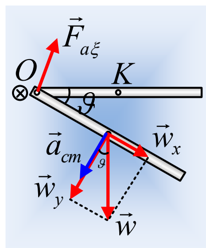
$$0+Mgh=\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2\,\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2\rightarrow$$



Ας έρθουμε τώρα στο άκρο O. Αυτό έχει ταχύτητα ίση με υ_{cm} λόγω της μεταφορικής κίνησης και γραμμική ταχύτητα $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega r=\omega\frac{\ell}{2}$ εξαιτίας της κυκλικής του κίνησης γύρω από το K, με κατευθύνσεις όπως στο διπλανό σχήμα. Αλλά όμως $\upsilon_o=0$, οπότε $\upsilon_{cm}=\omega\frac{\ell}{2}$ και η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$Mg\frac{\ell}{2}\cdot\eta\mu\vartheta=\frac{1}{2}M\frac{\ell^2}{4}\omega^2+\frac{1}{2}\frac{1}{12}M\ell^2\omega^2\rightarrow\omega=\sqrt{\frac{3g\cdot\eta\mu\vartheta}{\ell}}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3\cdot 10\cdot 0{,}5}{0{,}6}}rad/s=5rad/s$$



ii) Α) Ο Αντώνης: Με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση της ράβδου παίρνουμε:

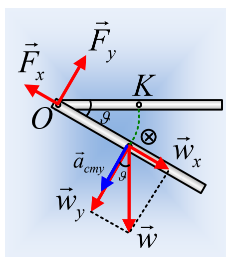
$$\Sigma\tau_o=I_o a_{\gamma\omega\nu}\rightarrow\; w_y\cdot\frac{\ell}{2}=I_o a_{\gamma\omega\nu}\rightarrow a_{\gamma\omega\nu}=\frac{w_y\ell}{2I_o}=\frac{Mg\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta}{2I_o}$$

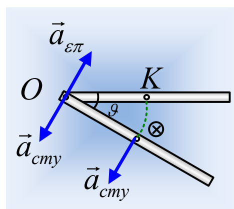
$$a_{\gamma\omega\nu}=\frac{Mg\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta}{2I_o}=\frac{3\cdot 10\cdot 0{,}6\cdot\sqrt{3}/2}{2\cdot 0{,}36}rad/s^2=12{,}5\sqrt{3}rad/s^2$$

Με διεύθυνση οριζόντια, πάνω στον άξονα και με φορά προς τα μέσα, όπως στο σχήμα.

Το κέντρο μάζας K της ράβδου, έχει επιτάχυνση, όπως στο σχήμα, μέτρου:

$$a_{cm}=a_{\gamma\omega\nu}\frac{\ell}{2}=12{,}5\sqrt{3}\cdot 0{,}3m/s^2=3{,}75\sqrt{3}m/s^2.$$





Β) Ο Βασίλης: Αναλύουμε την δύναμη του άξονα, παίρνοντας τις συνιστώσες F_x και F_y όπως στο σχήμα και εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα, για τη σύνθετη κίνηση της ράβδου:

$W_y-F_y=Ma_{cmy}$ (1)

$F_x-W_x=Ma_{cmx}$ (2)

$$F_y\frac{\ell}{2}=I_{cm}a_{\gamma\omega\nu}\rightarrow F_y\frac{\ell}{2}=\frac{1}{12}M\ell^2\cdot a_{\gamma\omega\nu}\rightarrow$$

$$F_y = \frac{1}{6} M\ell \cdot a_{\gamma\omega\nu} \ (3)$$

Αλλά εστιάζοντας στο άκρο O, η σχέση $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega r=\omega\frac{\ell}{2}$ με παραγώγιση μας δίνει:

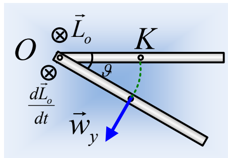
$$\frac{d\upsilon_{\gamma\rho}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\frac{\ell}{2} \to a_{\varepsilon\pi} = a_{\gamma\omega\nu}\frac{\ell}{2} = a_{cmy} \ (4)$$

Οπότε από (1) και (3) με τη βοήθεια της (4) παίρνουμε:

$$\alpha_{cmy} = \frac{3g\sigma\upsilon\nu\theta}{4} = 3{,}75\sqrt{3} m/s^2$$

Και $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{2a_{cmy}}{\ell} = \frac{2\cdot 3{,}75\sqrt{3}}{0{,}6} rad/s^2 = 12{,}5\sqrt{3} rad/s^2$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν χρησιμοποιήσαμε παραπάνω την εξίσωση (2), αφού δεν μας χρειάστηκε. Το κέντρο μάζας Κ εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από το Ο και οι δυνάμεις στη διεύθυνση x εξασφαλίζουν την κυκλική αυτή κίνηση…



iii) Α) Ο Αντώνης. Η ράβδος στρέφεται γύρω από τον άξονα στο άκρο Ο, οπότε η στροφορμή έχει τη διεύθυνση του άξονα, φορά προς τα μέσα με μέτρο:

$$L_o = I_o\omega = 0{,}36\cdot 5kgm^2/s = 1{,}8kgm^2/s.$$

Ενώ την ίδια κατεύθυνση έχει και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, με μέτρο:

$$\frac{dL_o}{dt} = \Sigma\tau = W_y\frac{\ell}{2} = Mg\sigma\upsilon\nu\theta\frac{\ell}{2} = 3\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{0{,}6}{2} kgm^2/s^2 = 4{,}5\sqrt{3} kgm^2/s^2.$$

Β) Ο Βασίλης: Η ράβδος εκτελεί σύνθετη κίνηση και η στροφορμή της, έχει την κατεύθυνση του σχήματος και μέτρο:

$$L_o = M\upsilon_{cm}r + I_{cm}\omega = M\omega\frac{\ell^2}{4} + \frac{1}{12}M\ell^2\omega \to$$

$$L_o = 3\cdot 5\cdot\frac{0{,}6^2}{4} kgm^2/s + \frac{1}{12}3\cdot 0{,}6^2\cdot 5kgm^2/s = 1{,}8kgm^2/s.$$

Ενώ την ίδια κατεύθυνση έχει και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, με μέτρο:

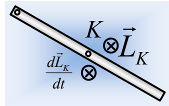
$$\frac{dL_o}{dt} = \frac{d\left(M\upsilon_{cm}r + I_{cm}\omega\right)}{dt} = Ma_{cm}\frac{\ell}{2} + \frac{1}{12}M\ell^2 a_{\gamma\omega\nu}$$

$$\frac{dL_o}{dt} = 3\cdot 3{,}75\sqrt{3}\cdot\frac{0{,}6}{2} kgm^2/s^2 + \frac{1}{12}3\cdot 0{,}6^2\cdot 12{,}5\sqrt{3} kgm^2/s^2 = 4{,}5\sqrt{3} kgm^2/s^2.$$

Ισοδύναμα βέβαια θα μπορούσαμε να πούμε ότι:

$$\frac{dL_o}{dt} = \Sigma\tau_o = W_y\frac{\ell}{2} = Mg\sigma\upsilon\nu\theta\frac{\ell}{2} = 3\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{0{,}6}{2} kgm^2/s^2 = 4{,}5\sqrt{3} kgm^2/s^2.$$

iv) Εδώ και οι δύο μαθητές δίνουν την ίδια απάντηση, αφού ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο που περνά από το κέντρο μάζας, «βλέπουν» την ίδια ιδιοστροφορμή, με φορά προς τα μέσα και μέτρο:



$$L_K = I_{cm}\omega = \frac{1}{12}M\ell^2\omega = \frac{1}{12}3 \cdot 0{,}6^2 \cdot 5kgm^2/s = 0{,}45kgm^2/s.$$

Ενώ την ίδια κατεύθυνση έχει και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας και μέτρο:

$$\frac{dL_K}{dt} = \frac{d\left(I_{cm}\omega\right)}{dt} = \frac{1}{12}M\ell^2 a_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{12}3 \cdot 0{,}6^2 \cdot 12{,}5\sqrt{3}kgm^2/s^2 = 1{,}125\sqrt{3}kgm^2/s^2.$$

Ή ισοδύναμα:

$$\frac{dL_K}{dt} = \Sigma\tau_K = F_y\frac{\ell}{2} = \frac{1}{6}M\ell \cdot a_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{12}M\ell^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} = 1{,}125\sqrt{3}kgm^2/s^2.$$

Σχόλιο:

Τελικά ποιος μαθητής είχε δίκιο; Τι κίνηση κάνει η ράβδος;

Η ράβδος κινείται! Υπάρχει **μια** κίνηση. Το αν αυτή θα χαρακτηρισθεί απλή ή σύνθετη, εξαρτάται από την οπτική γωνία, από την οποία θα την αντιμετωπίσουμε.

Ελπίζω η παραπάνω ανάλυση να έδειξε ότι οι δυο τρόποι είναι ισοδύναμοι και οδηγούν στα ίδια αποτελέσματα. Μπορεί ο ένας τρόπος να έχει λιγότερη δουλειά από τον άλλο και να είναι προτιμότερος, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι κάποιος δεν δικαιούται να ακολουθήσει τον «δύσκολο» δρόμο…

Υλικό Φυσικής-Χημείας
Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης