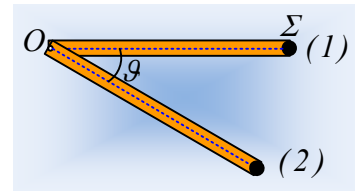


Η ράβδος και η σημειακή μάζα.

Μια ομογενής ράβδος μήκους $\ell=1,5\text{m}$ και μάζας $m=3\text{kg}$ μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της O . Στο άλλο άκρο της ράβδου δένουμε ένα σώμα Σ , της ίδιας μάζας m με τη ράβδο και αμελητέων διαστάσεων (υλικό σημείο), οπότε έτσι δημιουργούμε ένα στερεό s . Φέρνουμε το στερεό στη θέση (1) ώστε η ράβδος να είναι οριζόντια και το αφήνουμε να κινηθεί.



- i) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του στερεού s , ως προς τον άξονα περιστροφής του.
- ii) Να βρεθεί η αρχική γωνιακή επιτάχυνση του στερεού, καθώς και η δύναμη F που ασκείται στο σώμα Σ από τη ράβδο, αμέσως μόλις αφεθεί το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί.
- iii) Μετά από λίγο, η ράβδος σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ , όπου $\eta\mu\theta=0,6$, ευρισκόμενη στη θέση (2). Για τη θέση αυτή ζητούνται:
 - α) Η κινητική ενέργεια του στερεού s .
 - β) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής του σώματος Σ , κατά (ως προς) τον άξονα περιστροφής στο O .
 - γ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του στερεού s .
- iv) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης F (που ασκεί η σανίδα στο σώμα Σ), από την θέση (1) μέχρι τη θέση (2).

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της στο O , $I_1 = \frac{1}{3} m\ell^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Για τη ροπή αδράνειας του στερεού το οποίο αποτελείται από τη ράβδο και το υλικό σημείο Σ , θα έχουμε ότι $I_s = I_1 + I_2$ όπου I_1 η ροπή αδράνειας της ράβδου και I_2 η ροπή αδράνειας η οποία οφείλεται στο σώμα Σ . Έτσι έχουμε:

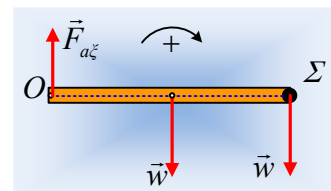
$$I_s = \frac{1}{3} m\ell^2 + m\ell^2 = \frac{4}{3} m\ell^2 = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 1,5^2 \text{ kgm}^2 = 9 \text{ kgm}^2.$$

- ii) Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό s , μόλις αφεθεί να κινηθεί. Με εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\Sigma\tau = I_s a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow w \cdot \frac{\ell}{2} + w \cdot \ell = I_s a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3mg\ell}{2I_s} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 1,5}{2 \cdot 9} \text{ rad/s}^2 = 7,5 \text{ rad/s}^2.$$

Αλλά τότε το σώμα Σ , αποκτά επιτάχυνση, κατακόρυφη, όπως στο σχήμα με μέτρο:



$$a_{\Sigma} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot \ell = 7,5 \cdot 1,5 \text{ m/s}^2 = 11,25 \text{ m/s}^2.$$

Οι δυνάμεις όμως που ασκούνται στο Σ είναι το βάρος και μια δύναμη από τη σανίδα F , ενώ από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για υλικό σημείο ($\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$) η επιτάχυνση έχει την κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης. Αλλά τότε και η δύναμη από τη ράβδο είναι κατακόρυφη, οπότε:

$$F + mg = ma_{\Sigma} \rightarrow F = m(a_{\Sigma} - g) = 3 \cdot (11,25 - 10) \text{ N} = 3,75 \text{ N}.$$

iii) Στη διάρκεια της περιστροφής του στερεού οι δυνάμεις που παράγουν έργο είναι τα δυο βάρη, δυνάμεις συντηρητικές, οπότε η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή.

α) Έτσι θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το άκρο της ράβδου, στη θέση (2) έχουμε:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \rightarrow$$

$$0 + 2mgh_1 = K_2 + mgh_2 \rightarrow 2mg\ell \cdot \eta\mu\theta = K_2 + mg \frac{\ell}{2} \cdot \eta\mu\theta \rightarrow$$

$$K_2 = \frac{3}{2} mg\ell \cdot \eta\mu\theta = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 10 \cdot 1,5 \cdot 0,6 \text{ J} = 40,5 \text{ J}$$

β) Η παραπάνω κινητική ενέργεια είναι ίση με $K_2 = \frac{1}{2} I_s \omega_2^2 \rightarrow$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2K_2}{I_s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40,5}{9}} \text{ rad/s} = 3 \text{ rad/s}$$

Οπότε η στροφορμή του Σ , το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο που εκτελεί κυκλική κίνηση, έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής, φορά προς τα μέσα και μέτρο:

$$L_{\Sigma} = m v_{\Sigma} r = m \omega \ell^2 \rightarrow$$

$$L_{\Sigma} = 3 \cdot 3 \cdot 1,5^2 \text{ kgm}^2 / \text{s} = 20,25 \text{ kgm}^2 / \text{s}.$$

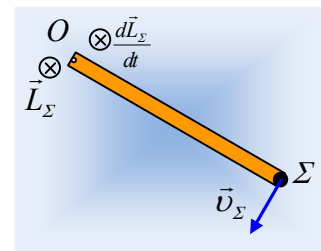
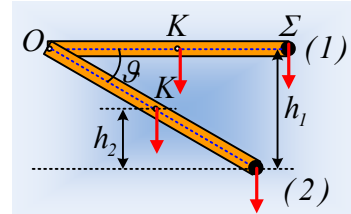
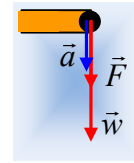
Την ίδια κατεύθυνση έχει και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής στο άκρο O , του σώματος Σ , ενώ το μέτρο του είναι:

$$\frac{dL_{\Sigma}}{dt} = \frac{d(m v_{\Sigma} r)}{dt} = m \frac{d|v|}{dt} \ell = m a_{\varepsilon\pi} \ell = m a_{\gamma\omega\nu} \cdot \ell^2 \rightarrow$$

Αλλά στη θέση αυτή:

$$\Sigma \tau = I_s a_{\gamma\omega\nu 1} \rightarrow w \cdot \frac{\ell}{2} \sigma\upsilon\nu\theta + w \cdot \ell \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = I_s a_{\gamma\omega\nu 1} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu 1} = \frac{3mg\ell \sigma\upsilon\theta}{2I_s} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 1,5 \cdot 0,8}{2 \cdot 9} \text{ rad/s}^2 = 6 \text{ rad/s}^2.$$



$$\frac{dL_{\Sigma}}{dt} = ma_{\gamma\omega\nu} \cdot \ell^2 = 3 \cdot 6 \cdot 1,5^2 \text{ kgm}^2 / \text{s}^2 = 40,5 \text{ kgm}^2 / \text{s}^2.$$

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του στερεού είναι ίσος με το ρυθμό που οι ασκούμενες δυνάμεις (ροπές) παράγουν έργο:

$$\frac{dK}{dt} = P_{\Sigma\tau} = (\Sigma\tau)\omega_2 = \left(mg \frac{\ell}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + mg\ell \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \right) \omega_2 \rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{3}{2} mg\ell \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \omega_2 = \frac{3}{2} 3 \cdot 10 \cdot 1,5 \cdot 0,8 \cdot 3 \text{ J/s} = 162 \text{ J/s}$$

iv) Εφαρμόζουμε για το σώμα Σ το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από τη θέση (1) στη θέση (2):

$$K_{\Sigma 2} - K_{\Sigma 1} = W_w + W_F \rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{2} m v_{\Sigma}^2 - W_w = \frac{1}{2} m \omega_2^2 \ell^2 - mg\ell \cdot \eta\mu\theta \rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{2} m \omega_2^2 \ell^2 - mg\ell \cdot \eta\mu\theta = \frac{1}{2} 3 \cdot 3^2 \cdot 1,5^2 \text{ J} - 3 \cdot 10 \cdot 1,5 \cdot 0,6 \text{ J} = 3,375 \text{ J}$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιάζεισαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης