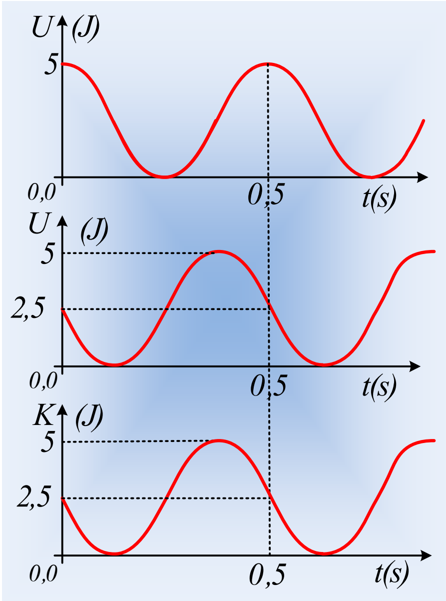
Διαγράμματα δυναμικής ενέργειας.



Ένα υλικό σημείο μάζας 1kg εκτελεί ΑΑΤ και στο πρώτο διάγραμμα δίνεται η δυναμική του ενέργεια σε συνάρτηση με το χρόνο.

i) Να βρεθούν η περίοδος και το πλάτος ταλάντωσης.
ii) Να γίνει η γραφική παράσταση x=x(t) της απομάκρυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.
iii) Αν το διάγραμμα είχε τη μορφή του δεύτερου σχήματος, ποια μορφή θα είχε η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης, αν τη στιγμή t=0, το σώμα κινείται προς την θετική κατεύθυνση;
iv) Τη στιγμή t=0, το σώμα κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση, ενώ το αντίστοιχο διάγραμμα κινητικής ενέργειας, έχει τη μορφή του τρίτου διαγράμματος. Να γίνει ξανά η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Δίνεται $\pi^2 \approx 10$.

Απάντηση:

i) Με βάση το πρώτο διάγραμμα, το σώμα τη στιγμή t=0, έχει μέγιστη δυναμική ενέργεια. Αυτό σημαίνει ότι βρίσκεται σε θέση πλάτους. Η δυναμική ενέργεια ξαναγίνεται μέγιστη μετά από 0,5s, πράγμα που σημαίνει ότι χρειάζεται 0,5s, για να μεταβεί από τη μια ακραία θέση του, στην άλλη. Αλλά ο χρόνος αυτός είναι ίσος με ½ Τ, οπότε η περίοδος ταλάντωσης είναι Τ=1s.

Εξάλλου η μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης, δίνεται από την εξίσωση:

$$U_{max} = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m\frac{4\pi^2}{T^2}A^2 \rightarrow$$

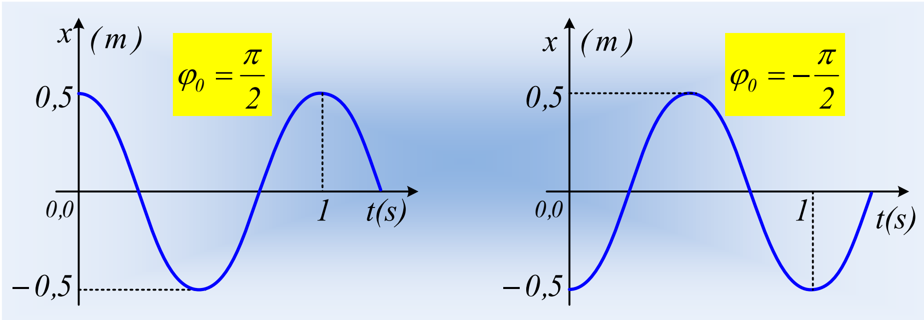
$$A = T\sqrt{\frac{U_{max}}{2m\pi^2}} = 1\sqrt{\frac{5}{2\cdot 1\cdot 10}}m = 0{,}5m$$

ii) Αφού το σώμα ξεκινά με μέγιστη δυναμική ενέργεια, βρίσκεται τη στιγμή t=0, σε ακραία θέση, οπότε η απομάκρυνση θα εμφανίζει αρχική φάση $\varphi_0= \pi/2$, αν ξεκινά από την θέση x=+A ή $\varphi_0=- \pi/2$ αν ξεκινά από τη θέση x=-A. Έτσι η εξίσωση της απομάκρυνσής του έχει τη μορφή:

$$x = A\cdot \eta\mu(\omega t+\varphi_0)\rightarrow$$

$$x = 0{,}5\cdot\eta\mu\left(2\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\ \text{(S.I.)}\quad \text{ή}\quad x = 0{,}5\cdot\eta\mu\left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\ \text{(S.I.)}$$

Με γραφικές παραστάσεις:



iii) Ας ακολουθήσουμε τώρα, μια λίγο περισσότερο τυπική πορεία. Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος είναι της μορφής:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Οπότε η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι της μορφής:

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \cdot \eta\mu^2(\omega t + \varphi_0) = U_{max} \cdot \eta\mu^2(\omega t + \varphi_0)$$

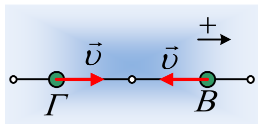
Αντικαθιστώντας τις τιμές για t=0, παίρνουμε:

$$2{,}5 = 5 \cdot \eta\mu^2(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \rightarrow \eta\mu^2(\varphi_0) = \frac{1}{2} \rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Αλλά τότε η αρχική φάση της απομάκρυνσης, μπορεί να πάρει τις τιμές (υπενθυμίζεται ότι $0 \le \varphi_0 < 2\pi$):

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4},\ \varphi_0 = \frac{3\pi}{4},\ \varphi_0 = \frac{5\pi}{4},\ \varphi_0 = \frac{7\pi}{4}$$

Όμως με βάση το διάγραμμα, η δυναμική ενέργεια μειώνεται τη στιγμή t=0 ή ισοδύναμα η συνάρτηση είναι φθίνουσα στη «γειτονιά» του t=0, οπότε το σώμα κινείται προς τη θέση ισορροπίας, αφού τότε μικραίνει το μέτρο της απομάκρυνσης x. Οπότε με βάση το διπλανό σχήμα, το σώμα θα βρίσκεται τη στιγμή t=0 στη θέση Β ή στη θέση Γ, κινούμενο όπως στο σχήμα. Έχουμε όμως ως δεδομένο ότι τη στιγμή t=0, το σώμα έχει θετική ταχύτητα, συνεπώς η θέση είναι η Γ. Αλλά τότε η αρχική φάση παίρνει την τιμή $\varphi_0 = \frac{7\pi}{4}$, αφού είναι η μόνη που ικανοποιεί τις σχέσεις x<0 και υ>0. Πράγματι:

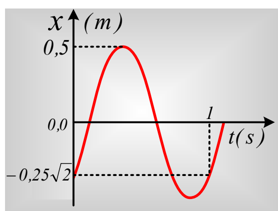


$$x = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = A \cdot \eta\mu\left(\frac{7\pi}{4}\right) < 0 \text{ και}$$

$$\upsilon = A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{4}\right) > 0$$

Προφανώς με βάση το διάγραμμα, έχουμε το ίδιο πλάτος και την ίδια περίοδο, με αυτά του i) ερωτήματος, οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσης γίνεται:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) = 0{,}5 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{7\pi}{4}\right)$$



Με μορφή όπως στο διπλανό σχήμα.

iv) Η ενέργεια ταλάντωσης παραμένει σταθερή, συνεπώς αφού τη στιγμή t=0 η κινητική ενέργεια είναι 2,5J:

$$K+U=E_\tau \rightarrow U=E_\tau\text{-}K=2,5J.$$

Έχουμε δηλαδή την ίδια κατάσταση με προηγούμενα, με τη διαφορά ότι καθώς περνά ο χρόνος η κινητική ενέργεια μειώνεται, οπότε η δυναμική αυξάνεται, με συνέπεια να αυξάνεται και η απομάκρυνση x. Ας μην ξεχνάμε όμως ότι το σώμα έχει και αρνητική ταχύτητα!

Αλλά τότε, με βάση την προηγούμενη ανάλυση, σημαίνει ότι τη στιγμή t=0, περνά από τη θέση Γ και η αρχική φάση παίρνει την τιμή $\varphi_{01}=\frac{5\pi}{4}$, αφού στη θέση αυτή x<0 και $\frac{dx}{dt}<0$ αφού το σώμα έχει αρνητική ταχύτητα απομακρυνόμενο από τη θέση ισορροπίας του. Πράγματι:

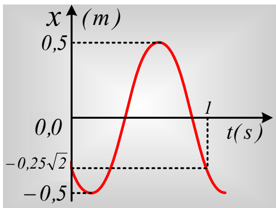
$$x=A\cdot\eta\mu(\omega\cdot 0+\varphi_{01})=A\cdot\eta\mu\left(\frac{5\pi}{4}\right)<0 \text{ και}$$

$$\upsilon=A\omega\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega\cdot 0+\varphi_{01})=A\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{4}\right)<0$$

Αλλά τότε η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

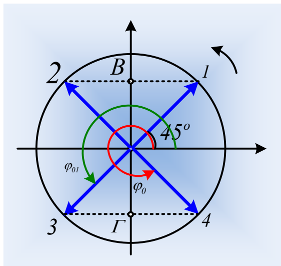
$$x=A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_{01})=0,5\cdot\eta\mu\left(2\pi t+\frac{3\pi}{4}\right)$$

Και η μορφή της παραπάνω συνάρτησης είναι αυτή του διπλανού σχήματος.



Σχόλια.

1) Θα μπορούσαμε να δουλέψουμε με περιστρεφόμενα διανύσματα (τον κύκλο αναφοράς της ταλάντωσης), όπου τη στιγμή t=0 το σώμα περνά από τη θέση $x=\pm 0,25\sqrt{2}m$, στο σχήμα σημεία Β και Γ. Αλλά τότε το περιστρεφόμενο διάνυσμα, η προβολή του οποίου μας δίνει την απομάκρυνση, μπορεί να είναι στις θέσεις 1, 2, 3 και 4. Στο ερώτημα ii) το σώμα πλησιάζει στη θέση ισορροπίας με υ>0 και η θέση 4 περιγράφει την κατάσταση, οπότε $\varphi_0=\frac{7\pi}{4}$, ενώ στο iii) ερώτημα το σώμα απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο με αρνητική ταχύτητα, θέση 3, όπου $\varphi_{01}=\frac{5\pi}{4}$.



2) Μπορείτε να δείτε και μια ακόμη ανάρτηση για τριγωνομετρικές συναρτήσεις, που χρησιμοποιούμε στις ταλαντώσεις:

[Γραφικές Παραστάσεις Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων.]

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης