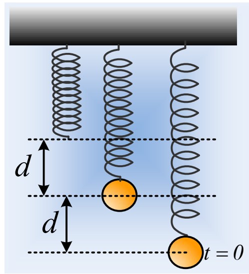
Οι δυναμικές ενέργειες μεταβάλλονται.



Ένα σώμα ηρεμεί στο κάτω άκρο ιδανικού ελατηρίου, έχοντας επιμηκύνει το ελατήριο κατά d. Εκτρέπουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω επίσης κατά d και τη χρονική στιγμή t=0 το αφήνουμε ελεύθερο, οπότε εκτελεί ΑΑΤ. Τη στιγμή $t_1=T/3$, όπου Τ η περίοδος ταλάντωσης, το σώμα περνά από μια θέση Γ. Για τη θέση αυτή και θεωρώντας θετική την προς τα πάνω κατεύθυνση, να βρεθούν:

i) Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του.

ii) Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του σώματος.

iii) Το ποσοστό της ενέργειας ταλάντωσης, το οποίο εμφανίζεται με τη μορφή της κινητικής ενέργειας του σώματος.

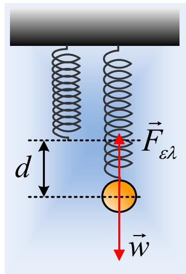
iv) Αν η κινητική ενέργεια του σώματος, στη θέση Γ, μειώνεται κατά 10J/s, να υπολογιστούν οι ρυθμοί μεταβολής:

α) της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης.

β) της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.

Απάντηση:



Το σώμα στη θέση ισορροπίας, x=0, δέχεται τις δυνάμεις οι οποίες έχουν σημειωθεί στο διπλανό σχήμα, όπου:

$$ΣF=0 \rightarrow F_{ελ}=w \text{ ή } k\cdot Δ\ell=mg \quad \text{ή } kd=mg \; (1).$$

i) Το σώμα εκτρέπεται μέχρι τη θέση x=-d (αφού τα θετικά είναι προς τα πάνω) και αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα, συνεπώς το πλάτος ταλάντωσης είναι ίσο με d (A=d) και από τη γενική εξίσωση για την απομάκρυνσή του:

$$x=A\cdot ημ(ωt+φ_0) \quad (2)$$

Θέτοντας t=0 και x=-A, παίρνουμε:

$$-A=A\cdot ημφ_0 \rightarrow ημφ_0=-1 \text{ ή } φ_0=\frac{3π}{2}$$

Αλλά τότε με αντικατάσταση στην σχέση (2) $t_1=T/3$ θα έχουμε:

$$x_1=A\cdot ημ\left(ωt+\frac{3π}{2}\right)=d\cdot ημ\left(\frac{2π}{T}\frac{T}{3}+\frac{3π}{2}\right)=d\cdot ημ\left(2π+\frac{π}{6}\right)=\frac{d}{2}$$

Το σώμα δηλαδή βρίσκεται πάνω από τη θέση ισορροπίας του σε απομάκρυνση $x_1=+d/2$ κινούμενο με θετική ταχύτητα (ας σκεφτούμε ότι η άνοδός του, μέχρι την πάνω ακραία θέση διαρκεί T/2…)

ii) Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας λέγεται και επιτάχυνση! Αλλά η επιτάχυνση, μπορεί να υπολογιστεί από το 2^{ο} νόμο του Νεύτωνα:

$$ΣF=mα \rightarrow α=\frac{ΣF}{m}=\frac{-Dx}{m}=-\frac{k}{m}x$$

Όμως από την (1) $\frac{k}{m}=\frac{g}{d}$ και με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$\alpha=-\frac{k}{m}x=-\frac{g}{d}\cdot\frac{d}{2}=-\frac{g}{2}$$

Όπου το (-) μας δείχνει ότι η επιτάχυνση έχει κατεύθυνση προς τα κάτω, προς τη θέση ισορροπίας. Προφανώς θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει για τον υπολογισμό της επιτάχυνση και την εξίσωση $\alpha=-\omega^2\cdot A\cdot ημ(\omega t+\varphi_0)$ …

iii) Η ενέργεια ταλάντωσης στη θέση Γ, εμφανίζεται ως κινητική και ως δυναμική, οπότε:

$$K+U=E_\tau\rightarrow\ K+\frac{1}{2}Dx_1^2=\frac{1}{2}DA^2\rightarrow$$

$$K=\frac{1}{2}kd^2-\frac{1}{2}k\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\frac{1}{2}kd^2=\frac{3}{4}E_\tau$$

Αλλά αν η κινητική ενέργεια είναι τα ¾ της ολικής ενέργειας, ισοδύναμα μπορεί να εκφραστεί και ως ποσοστό ως 75%! Θέλουμε μαθηματικά; Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi=\frac{K}{E_\tau}100\%=\frac{\frac{3}{4}E_\tau}{E_\tau}100\%=75\%$$

iv) Αφού η ενέργεια ταλάντωσης παραμένει σταθερή, αν μειώνεται η κινητική ενέργεια, τότε ισοδύναμα αυξάνεται η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης.

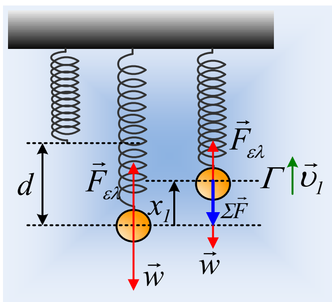
α) Συνεπώς στην θέση Γ η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης αυξάνεται κατά 10J/s ή ισοδυναμα ο ρυθμός μεταβολής της είναι ίσος με $\frac{dU_\tau}{dt}=+10J/s$.

Θα μπορούσαμε να το πούμε με «περισσότερα» μαθηματικά;

Αν K+U=σταθ., τότε ΔΚ+ΔU=0 ή

$$\frac{dK}{dt}+\frac{dU_\tau}{dt}=0\rightarrow\frac{dU_\tau}{dt}=-\frac{dK}{dt}=-(-10)J/s=+10J/s$$

β) Ας δούμε τι ακριβώς συμβαίνει στη θέση Γ. Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, στη θέση Γ.



Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος στη θέση αυτή είναι ίσος με:

$$\frac{dK}{dt}=\frac{dW_{ολ}}{dt}=\frac{|\Sigma F|\cdot dx\cdot συνα}{dt}=-|\Sigma F|\cdot\upsilon_1=-kx_1\cdot\upsilon_1$$

Αλλά τότε:

$$\frac{dU_\tau}{dt}=-\frac{dK}{dt}=+kx_1\cdot\upsilon_1=-P_{\Sigma F}\ (3)$$

δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης, είναι ίσος με το αντίθετο της ισχύος της δύναμης επαναφοράς.

Ας έρθουμε τώρα στο ελατήριο. Η ισχύς της δύναμης του ελατηρίου $\left(\vec{F}_{\varepsilon\lambda}\right)$, ίση με το ρυθμό με τον οποίο το ελατήριο προσφέρει ενέργεια στο σώμα, είναι ίση:

$$P_{F_{\varepsilon\lambda}} = \frac{dW_{F_{\varepsilon\lambda}}}{dt} = F_{\varepsilon\lambda} \cdot \upsilon_1 = k\left(d - x_1\right)\cdot \upsilon_1$$

Αλλά η ισχύς αυτή θα είναι αντίθετη με τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου (για παράδειγμα αν το σώμα **παίρνει** ενέργεια 2J/s από το ελατήριο, τότε το ελατήριο **χάνει** ενέργεια 2J/s), οπότε:

$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -P_{F_{\varepsilon\lambda}} = -k(d - x_1)\cdot \upsilon_1 \quad (4)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των (4) και (3) παίρνουμε:

$$\frac{\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt}}{\frac{dU_{\tau}}{dt}} = \frac{-k(d-x_1)\cdot \upsilon_1}{kx_1 \cdot \upsilon_1} = -\frac{d - x_1}{x_1} = -\frac{d - d/2}{d/2} = -1 \rightarrow$$

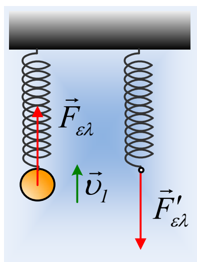
$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -\frac{dU_{\tau}}{dt} = -10J/s$$

Σχόλια:

1) Το σώμα στη θέση Γ απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του και η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης αυξάνεται $\frac{dU_{\tau}}{dt} > 0$, αντίθετα πλησιάζει τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, με αποτέλεσμα η ελαστική δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης του ελατηρίου, να μειώνεται $\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} < 0$.

2) Η δυναμική ενέργεια, συνδέεται με το έργο μιας συντηρητικής δύναμης. Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης συνδέεται με το έργο της δύναμης επαναφοράς, οπότε $\frac{dU_{\tau}}{dt} = -P_{\Sigma F} = -P_{F_{\varepsilon\pi}}$, ενώ η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, με το έργο της δύναμης του ελατηρίου, όπου $\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -P_{F_{\varepsilon\lambda}}$.

3) Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, μεταβάλλεται μέσω του έργου της δύναμης που δέχεται το ελατήριο από το σώμα. Η δύναμη αυτή, είναι η αντίδραση της $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$, η $\vec{F}'_{\varepsilon\lambda}$ μέτρου $\vec{F}'_{\varepsilon\lambda} = k(d - x_1)$. Αλλά τότε ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του ελατηρίου, θα είναι ίσος με το ρυθμό που η παραπάνω δύναμη παράγει έργο, οπότε:



$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = P_{F'_{\varepsilon\lambda}} = \frac{\left|F'_{\varepsilon\lambda}\right|\cdot\left|dx\right|\cdot \sigma\upsilon\nu 180^o}{dt} = -\left|F'_{\varepsilon\lambda}\right|\cdot\left|\upsilon_1\right| = -k(d - x_1)\cdot \upsilon_1$$

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης