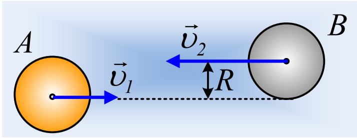
Μια έκκεντρη κρούση δύο σφαιρών.



Δύο λείες, ομογενείς σφαίρες με μάζες m_1 =0,1kg, m_2=0,2kg και την ίδια ακτίνα R, κινούνται χωρίς να περιστρέφονται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με παράλληλες ταχύτητες μέτρων υ_1=0,6m/s και υ_2=0,9m/s, όπως στο σχήμα, όπου η απόσταση των φορέων των ταχυτήτων είναι ίση με την ακτίνα των σφαιρών. Οι σφαίρες συγκρούονται ελαστικά.

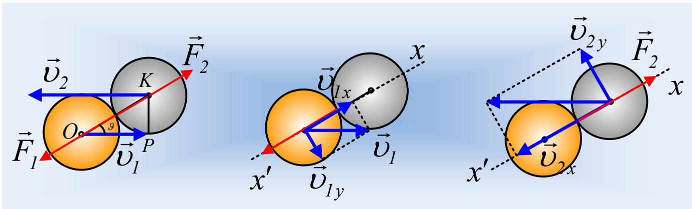
i) Να βρεθούν οι ταχύτητες των δύο σφαιρών μετά την κρούση.

ii) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής της Α σφαίρας, που οφείλεται στην κρούση.

iii) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης F_1 που ασκήθηκε στη διάρκεια της κρούσης στην Α σφαίρα.

Απάντηση:

i) Στη διάρκεια της κρούσης, ασκούνται στις σφαίρες οι δυνάμεις F_1 και F_2 του πρώτου από τα παρακάτω σχήματα, όπου οι φορείς τους βρίσκονται πάνω στη διάκεντρο των δύο σφαιρών.



Στα δύο επόμενα σχήματα, έχουν αναλυθεί οι ταχύτητες των σφαιρών, πριν την κρούση σε δύο κάθετες διευθύνσεις. Στη διεύθυνση x΄x, πάνω στη διάκεντρο των σφαιρών στη διάρκεια της κρούσης και y΄y, σε κάθετη διεύθυνση. Η κρούση (και η εμφάνιση των δυνάμεων) οφείλεται στις συνιστώσες υ_{1x} και υ_{2x} των δύο ταχυτήτων, ενώ οι συνιστώσες υ_{ly} και υ_{2y} δεν πρόκειται να μεταβληθούν, δηλαδή $\upsilon'_{1y} = \upsilon_{1y}$ και $\upsilon'_{2y} = \upsilon_{2y}$.

Εξάλλου για τη διεύθυνση x από το τρίγωνο ΟΡΚ, έχουμε $\eta\mu\vartheta = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$ ή θ=30°.

Από την αρχή διατήρηση της ορμής παίρνουμε:

$$\vec{P}_\pi = \vec{P}_\mu \rightarrow \begin{cases} P_{\pi,x} = P_{\mu,x} \rightarrow m_1\upsilon_{1x} + m_2\upsilon_{2x} = m_1\upsilon'_{1x} + m_2\upsilon'_{2x} \ (1) \\ P_{\pi,y} = P_{\mu,y} \rightarrow m_1\upsilon_{1y} + m_2\upsilon_{2y} = m_1\,\upsilon'_{1y} + m_2\upsilon'_{2y} \end{cases}$$

Ενώ αφού η κρούση είναι ελαστική η κινητική ενέργεια πριν την κρούση, είναι ίση με την κινητική ενέργεια μετά την κρούση:

$$K_{\pi\rho\iota\nu} = K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1x}^2+\cancel{\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1y}^2}+\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2x}^2+\cancel{\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2y}^2}=\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1x}'^2+\cancel{\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1y}'^2}+\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2x}'^2+\cancel{\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2y}'^2}\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1x}^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2x}^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1x}'^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2x}'^2 \quad (2)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) περιγράφει μια «κεντρική» ελαστική κρούση των σφαιρών στη διεύθυνση x΄x, οπότε ισχύουν οι γνωστές εξισώσεις για την κρούση αυτή.

Πριν την κρούση έχουμε ταχύτητες:

$$\upsilon_{1x}=\upsilon_1\sigma\upsilon\nu\theta=0,6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}m/s=0,3\sqrt{3}m/s \text{ και } \upsilon_{1y}=\upsilon_1\eta\mu\theta=0,6\cdot\frac{1}{2}m/s=0,3m/s$$

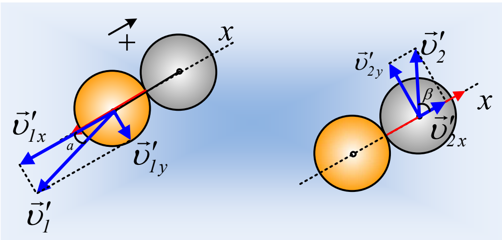
$$\upsilon_{2x}=\upsilon_2\sigma\upsilon\nu\theta=0,9\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}m/s=0,45\sqrt{3}m/s \text{ και } \upsilon_{2y}=\upsilon_2\eta\mu\theta=0,9\cdot\frac{1}{2}m/s=0,45m/s$$

Οπότε οι ταχύτητες στη διεύθυνση x΄x μετά την κρούση είναι:

$$\upsilon_{1x}'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{1x}+\frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{2x}=\frac{0,1-0,2}{0,1+0,2}0,3\sqrt{3}m/s+\frac{2\cdot 0,2}{0,1+0,2}\left(-0,45\sqrt{3}\right)m/s=-0,7\sqrt{3}m/s$$

$$\upsilon_{2x}'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_{1x}+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_{2x}=\frac{2\cdot 0,1}{0,1+0,2}0,3\sqrt{3}m/s+\frac{0,2-0,1}{0,1+0,2}\left(-0,45\sqrt{3}\right)m/s=0,05\sqrt{3}m/s$$

Αλλά τότε οι σφαίρες μετά την κρούση, έχουν τις ταχύτητες που σημειώνονται στο παρακάτω σχήμα, όπου:



$$\upsilon_1'=\sqrt{\upsilon_{1x}'^2+\upsilon_{1y}'^2}=\sqrt{\left(0,7\sqrt{3}\right)^2+\left(0,3\right)^2}m/s=\sqrt{1,56}m/s\approx 1,25m/s \text{ και } \varepsilon\varphi\alpha=\frac{\upsilon_{1y}'}{\upsilon_{1x}'}=\frac{0,3}{0,7\sqrt{3}}\approx 0,24$$

$$\upsilon_2'=\sqrt{\upsilon_{2x}'^2+\upsilon_{2y}'^2}=\sqrt{\left(0,05\sqrt{3}\right)^2+\left(0,45\right)^2}m/s\approx 0,46m/s \text{ και } \varepsilon\varphi\beta=\frac{\upsilon_{2y}'}{\upsilon_{2x}'}=\frac{0,45}{0,05\sqrt{3}}\approx 5,2$$

ii) Για την μεταβολή της ορμής της Α σφαίρας έχουμε:

$$\Delta\vec{P}_A=\vec{P}_A'-\vec{P}_A\rightarrow\begin{cases}\Delta P_x=P_x'-P_x=m_1\upsilon_{1x}'-m_1\upsilon_{1x}\rightarrow\\ \Delta P_y=P_y'-P_y=0\end{cases}$$

$$\Delta P_A=\Delta P_x=0,1\left(-0,7\sqrt{3}-0,3\sqrt{3}\right)kgm/s=-0,1\sqrt{3}kgm/s$$

Με φορά ίδια με την υ_{1x}' .

iii) Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την σφαίρα Α, παίρνουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{ar\rho\chi} = \Sigma W \rightarrow$$

$$W_{F_1} = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 \rightarrow$$

$$W_{F_1} = \frac{1}{2} 0,1 \left(\sqrt{1,56}\right)^2 J - \frac{1}{2} 0,1 \cdot 0,6^2 J = 0,06 J$$

dmargaris@gmail.com