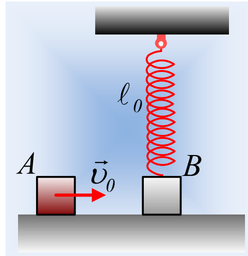
Ας βγάλουμε την τρίχα και ας απογειωθούμε!



Ένα σώμα Α μάζας m=0,5kg κινείται ευθύγραμμα σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα υ_0 και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερο σώμα Β, μάζας M=1kg, το οποίο ηρεμεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου, το οποίο έχει το φυσικό του μήκος l_0=2m και σταθερά k=50N/m, όπως στο διπλανό σχήμα. Το σώμα Α μετά την κρούση κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου υ_A'=2,5m/s.

i) Να βρεθεί η αρχική ταχύτητα υ_0 του Α σώματος, καθώς και η κινητική ενέργεια που μεταφέρθηκε στη διάρκεια της κρούσης στο σώμα Β.

ii) Να υπολογίστε το μήκος του ελατηρίου τη στιγμή που το σώμα Β χάνει την επαφή με το οριζόντιο επίπεδο.

iii) Την παραπάνω χρονική στιγμή να υπολογιστούν η κινητική ενέργεια και η επιτάχυνση του σώματος Β.

iv) Αν το μέγιστο ύψος από το οριζόντιο επίπεδο στο οποίο θα φτάσει το σώμα Β είναι Η=1m, ενώ στη θέση αυτή το ελατήριο έχει μήκος l=1,7m, να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του σώματος στη θέση αυτή.

Δίνεται g=10m/s^2, ενώ η δυναμική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης του ελατηρίου δίνεται από την σχέση U= ½ k(Δl)^2, ενώ οι διαστάσεις των σωμάτων θεωρούνται αμελητέες, θεωρούνται δηλαδή υλικά σημεία.

Απάντηση:

i) Για τις ταχύτητες των σωμάτων Α και Β μετά την κρούση έχουμε:

$$\upsilon_A' = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\upsilon_A \quad (1) \quad \text{και} \quad \upsilon_B' = \frac{2m_A}{m_A + m_B}\upsilon_A \quad (2)$$

Με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

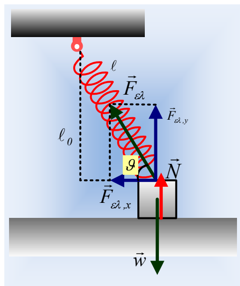
$$\upsilon_A' = \frac{m - M}{m + M}\upsilon_0 \rightarrow -2{,}5 = \frac{0{,}5 - 1}{0{,}5 + 1}\upsilon_0 \rightarrow \upsilon_0 = 7{,}5m/s$$

Ενώ από την (2) έχουμε:

$$\upsilon_B' = \frac{2m}{m + M}\upsilon_0 = \frac{2 \cdot 0{,}5}{0{,}5 + 1}7{,}5m/s = 5m/s$$

Συνεπώς η ενέργεια που μεταφέρθηκε στο Β σώμα, ίση με την κινητική ενέργεια που απέκτησε, είναι:

$$K_B = \frac{1}{2}M\upsilon_B'^2 = \frac{1}{2}1 \cdot 5^2 J = 12{,}5J$$



ii) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το σώμα Β σε μια τυχαία θέση του, μετά την κρούση και πριν «απογειωθεί». Στην κατακόρυφη διεύθυνση ΣF_y=0 →

$$F_{\varepsilon\lambda,y} + N - w = 0 \rightarrow k\Delta\ell \cdot \eta\mu\vartheta + N = Mg$$

Τη στιγμή που το σώμα χάνει την επαφή με το επίπεδο N=0 και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$k\Delta\ell \cdot \eta\mu\vartheta = Mg \rightarrow k\left(\ell - \ell_0\right)\cdot\frac{\ell_0}{\ell} = Mg \rightarrow$$

$$\ell = \frac{k\ell_0^2}{k\ell_0 - Mg} = \frac{50\cdot 2^2}{50\cdot 2 - 1\cdot 10}m = \frac{20}{9}m$$

iii) Η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώμα Β-ελατήριο παραμένει σταθερή, οπότε εφαρμόζοντας τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, για τη θέση αμέσως μετά την κρούση και στη θέση που χάνεται η επαφή, παίρνουμε:

$$K_B + U_{\varepsilon\lambda/\alpha\rho\chi} = K_{B/1} + U_{\varepsilon\lambda/1} \rightarrow$$

$$K_B + 0 = K_{B/1} + \frac{1}{2}k\left(\Delta\ell\right)^2 \rightarrow$$

$$K_{B/1} = K_B - \frac{1}{2}k\left(\ell - \ell_0\right)^2 = 12{,}5J - \frac{1}{2}50\cdot\left(\frac{20}{9} - 2\right)^2 J \approx 11{,}2J$$

Ενώ από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής, για τη θέση αυτή, παίρνουμε:

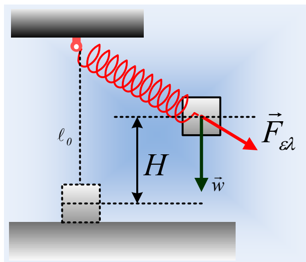
$$\Sigma F = Ma \rightarrow a = \frac{F_{\varepsilon\lambda.x}}{M} = \frac{k\Delta\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta}{M}$$

Αλλά από το σχήμα $\eta\mu\vartheta = \frac{\ell_0}{\ell} = \frac{2}{20/9} = 0{,}9$, οπότε $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \sqrt{1-\eta\mu^2\vartheta} = \sqrt{1-0{,}9^2} = \sqrt{0{,}19}$ και:

$$a = \frac{k\Delta\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta}{M} = \frac{50\cdot\left(\frac{20}{9} - 2\right)\sqrt{0{,}19}}{1}m/s^2 = 4{,}8m/s^2$$

Με φορά προς τα αριστερά, ίδια με την κατεύθυνση της συνισταμένης ($F_{\varepsilon\lambda,x}$).

iv) Εφαρμόζοντας ξανά την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα σώμα Β-ελατήριο και θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την αρχική θέση του Β, ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, έχουμε για τις θέσεις μετά την κρούση και τη θέση μέγιστου ύψους:



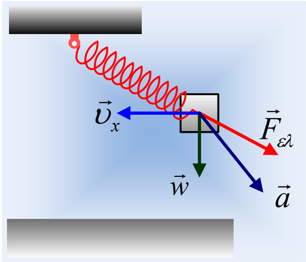
$$K_B + U_{\varepsilon\lambda/\alpha\rho\chi} + U_{\beta\alpha\rho/\alpha\rho\chi} = K_{B/2} + U_{\varepsilon\lambda/2} + U_{\beta\alpha\rho/2}$$

$$K_B + 0 + 0 = K_{B/2} + \frac{1}{2}k\left(\Delta\ell_2\right)^2 + MgH$$

$$K_{B/2} = 12{,}5J - \frac{1}{2}50\left(1{,}7-2\right)^2 J - 1\cdot 10\cdot 1J = 0{,}25J$$

Σχόλιο:

Το ότι το σώμα φτάνει σε μέγιστο ύψος H=1m, δεν σημαίνει ότι στη θέση αυτή μηδενίζεται η ταχύτητά του.



Αυτό θα συνέβαινε αν το σώμα κινείτο κατακόρυφα. Εδώ η κίνησή του δεν είναι κατακόρυφη, συνεπώς στο μέγιστο ύψος, έχει οριζόντια ταχύτητα, αφού απλά μηδενίζεται η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητάς του. Στη θέση δηλαδή που σταματά η άνοδος έχει οριζόντια ταχύτητα, στην οποία οφείλεται η κινητική ενέργεια που βρέθηκε παραπάνω και επιτάχυνση στη διεύθυνση της συνισταμένης, η οποία θα μεταβάλλει παραπέρα και τις δυο συνιστώσες ταχύτητα υ_x και υ_y.

Τώρα γιατί η ταχύτητα υ_x είναι προς τ' αριστερά, θα μπορούσε να δοθεί μια ποιοτική εξήγηση η οποία στηρίζεται στο μειωμένο μήκος του ελατηρίου. Αρκεί να σκεφτούμε ότι στη θέση της απογείωσης το ελατήριο, έχει επιμήκυνση ενώ στο μέγιστο ύψος το βρίσκουμε συσπειρωμένο. Μια εξήγηση πάντως που δεν καλύπτει το θέμα, η μελέτη του οποίου ξεφεύγει από τους σκοπούς της παρούσας ανάρτησης…

dmargaris@gmail.com