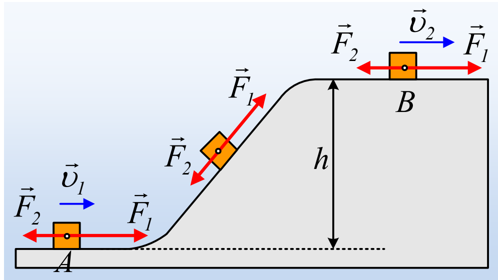
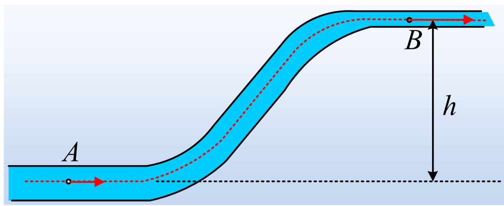
Από ένα υλικό σημείο, σε ένα σωμάτιο ρευστού.



A) Ένα σώμα, το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο, μάζας 0,2kg κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και τη στιγμή που περνά από μια θέση Α με ταχύτητα υ_1=1m/s, δέχεται δύο δυνάμεις μέτρων F_1=4N και F_2=3N, όπως στο σχήμα, με την βοήθεια των οποίων, φτάνει σε σημείο Β, ενός δεύτερου οριζοντίου επιπέδου, το οποίο βρίσκεται σε ύψος h=0,5m, αφού περάσει από ένα κεκλιμένο επίπεδο. Σε όλη τη διαδρομή οι δυο δυνάμεις έχουν την διεύθυνση της ταχύτητας (η πρώτη με την ίδια φορά και η δεύτερη αντίθετη φορά από την ταχύτητα). Στην παραπάνω κίνηση δεν εμφανίζονται τριβές, ενώ το σώμα διανύει συνολικά διάστημα s=1,3m, από τη θέση Α, στη θέση Β.

i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα υ_2 του σώματος στη θέση Β.

ii) Αν στη διάρκεια της παραπάνω μετακίνησης ασκείτο στο σώμα και δύναμη τριβής, για να εξασφαλίσουμε την ίδια ταχύτητα υ_2, θα χρειαστεί να αυξήσουμε το μέτρο της δύναμης F_1 στην τιμή F_1'=5N. Να υπολογιστεί η μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική κατά την μετακίνηση του σώματος από το Α στο Β.



Β) Σε ένα δίκτυο ύδρευσης, σε σημείο Α ενός οριζόντιου σωλήνα διατομής A_1=3cm^2, έχουμε ροή νερού με ταχύτητα υ_1=1m/s, ενώ η πίεση είναι ίση με p_1=106.500Pa . Ο σωλήνας εμφανίζει μια ανοδική πορεία καταλήγοντας σε άλλο οριζόντιο σωλήνα, διατομής A_2. Σε σημείο Β του σωλήνα αυτού, η πίεση είναι p_2=10^{5}Pa, ενώ η κατακόρυφη απόσταση των σημείων Α και Β είναι h=0,5m.

iii) Αν το νερό θεωρηθεί ασυμπίεστο ιδανικό ρευστό και η ροή μόνιμη και στρωτή, να βρεθεί η διατομή του σωλήνα στο σημείο Β.

iv) Να υπολογιστεί το έργο που παράγει πάνω σε ένα σωμάτιο ρευστού όγκου V_1=20cm^3, το υπόλοιπο νερό, κατά τη μετάβασή του από το σημείο Α στο σημείο Β.

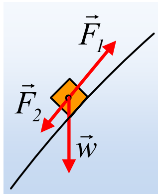
v) Το νερό βέβαια δεν είναι ιδανικό ρευστό, με αποτέλεσμα για να έχουμε την ίδια σταθερή παροχή, πρέπει να αυξήσουμε την πίεση στο σημείο Α στην τιμή p_A=1,2·10^{5}Pa. Να υπολογιστεί η μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική κατά την μετακίνηση του παραπάνω σωματίου ρευστού από το Α στο Β, εξαιτίας της τριβής.

Δίνεται η πυκνότητα του νερού ρ=1.000kg/m^3 και g=10m/s^2.

Απάντηση:

i) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για το σώμα, από τη θέση Α στη θέση Β.

$$K_B - K_A = W_{F_1} + W_{F_2} + W_w + W_N \quad (1)$$



Οι δυνάμεις F_1 και F_2 έχουν σταθερό μέτρο, έχοντας πάντα τη διεύθυνση της ταχύτητας, συνεπώς και τη διεύθυνση κάθε στοιχειώδους μετατόπισης Δx, συνεπώς για το έργο τους θα ισχύει:

$$\Delta W_F = F \cdot \Delta x \rightarrow$$

$$W_F = F \cdot \Delta x_1 + F \cdot \Delta x_2 .... + F \cdot \Delta x_\nu = F(\Delta x_1 + \Delta x_2 .... + \Delta x_\nu) = F \cdot s$$

Οπότε λαμβάνοντας υπόψη ότι για το έργο του βάρους ισχύει $W_w = U_{αρχ} - U_{τελ} = -mgh$, με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2} m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2} m\upsilon_1^2 = F_1 \cdot s - F_2 \cdot s - mgh \rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_1^2 + \frac{2(F_1 - F_2)s}{m} - 2gh} = \sqrt{1^2 + \frac{2(4-3)\cdot 1{,}3}{0{,}2} - 2\cdot 10\cdot 0{,}5}\, m/s = 2m/s$$

ii) Εφαρμόζουμε ξανά το Θ.Μ.Κ.Ε. για το σώμα, από τη θέση Α στη θέση Β.

$$K_B - K_A = W_{F_1'} + W_{F_2} + W_w + W_N + W_T \quad \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2} m\upsilon_1^2 = F_1' \cdot s - F_2 \cdot s - mgh + W_T \rightarrow$$

$$W_T = \frac{1}{2} 0{,}2(2^2 - 1^2)J - (5-3)\cdot 1{,}3J + 0{,}2\cdot 10\cdot 0{,}5J = -1{,}3J$$

Αλλά τότε η ενέργεια που εμφανίζεται με τη μορφή της θερμικής ενέργειας είναι ίση με Q=1,3J.

iii) Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ των σημείων Α και Β παίρνουμε:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho gh \rightarrow \quad \upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_1^2 + \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} - 2gh} \rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{1^2 + \frac{2(106.500 - 100.000}{10^3} - 2\cdot 10\cdot 0{,}5}\, m/s = 2m/s$$

Αλλά εφαρμόζοντας την εξίσωση της συνέχειας για τις διατομές στα σημεία Α και Β, έχουμε:

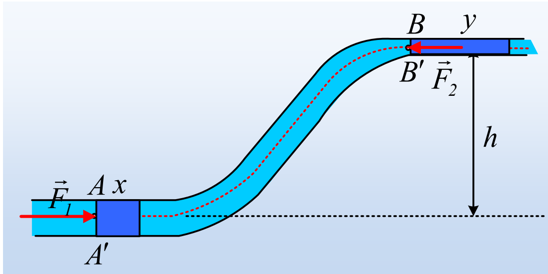
$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \rightarrow A_2 = A_1\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = 3cm^2\frac{1}{2} = 1{,}5cm^2$$

iv) Αν εφαρμόσουμε για το σωμάτιο ρευστού, το Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ των θέσεων Α και Β θα έχουμε:

$$K_B - K_A = W_F + W_w + W_N$$

Όπου W_F το έργο της δύναμης που δέχεται από την υπόλοιπη μάζα του νερού. Εξάλλου για το σωμάτιο του ρευστού έχουμε $m_1 = \rho\cdot V_1 = 10^3\cdot 20\cdot 10^{-6}kg = 0{,}02kg$, οπότε:

$$W_F = \frac{1}{2} m_1\upsilon_2^2 - \frac{1}{2} m_1\upsilon_1^2 + m_1 gh = \frac{1}{2} 0{,}02(2^2 - 1^2)J + 0{,}02\cdot 10\cdot 0{,}5J = 0{,}13J$$



Σημείωση:

Ποιο είναι στην πραγματικότητα το παραπάνω έργο;

Έστω η ποσότητα του νερού που περιλαμβάνεται μεταξύ των δύο διατομών των σωλήνων στα σημεία Α και Β. Η ποσότητα αυτή δέχεται από το υπόλοιπο νερό τις δυνάμεις $F_1=p_1 \cdot A_1$ και $F_2=p_2 \cdot A_2$. Αν τώρα μια ποσότητα νερού σε χρόνο Δt, μετατοπισθεί κατά x, η F_1 παράγει έργο $W_1=F_1x=p_1A_1x$. Αν τώρα πάρουμε τέτοιο x, ώστε $V_1=A_1x$, $W_1=F_1x=p_1V_1$, ενώ στον ίδιο χρόνο μια ίση ποσότητα νερού στο β, μετατοπίζεται κατά y, όπου επίσης $V_1=A_2 \cdot y$. Στον χρόνο αυτό η δύναμη F_2 παράγει έργο $W_2=-F_2 \cdot y=-p_2 \cdot A_2 y=-p_2V_1$. Έτσι το συνολικό έργο που παράγεται στην ποσότητα του νερού μεταξύ Α και Β (και ουσιαστικά το έργο που κέρδισε ο όγκος V_1, με σκούρο χρώμα) είναι:

$$W_F = p_1V_1 - p_2V_1 = (p_1 - p_2)V_1$$

$$W_F = (106.500 - 100.00)20 \cdot 10^{-6} J = 0,13J$$

v) Εφαρμόζουμε ξανά για το σωμάτιο ρευστού, το Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ των θέσεων Α και Β θα έχουμε:

$$K_B - K_A = W_F + W_w + W_N + W_T$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = (p_1 - p_2)V_1 - m_1gh + W_T \quad (2)$$

$$W_T = \frac{1}{2}0,02(2^2 - 1^2)J + 0,02 \cdot 10 \cdot 0,5J - (1,2 \cdot 10^5 - 1 \cdot 10^5)20 \cdot 10^{-6} J = -0,27J$$

Αλλά τότε η μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική είναι Q=0,27J.

Σχόλιο:

Διαιρώντας την σχέση (2) με τον όγκο V_1 παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}\frac{m_1}{V_1}\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}\frac{m_1}{V_1}\upsilon_1^2 = (p_1 - p_2) - \frac{m_1}{V_1}gh + \frac{W_T}{V_1} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_1 - p_2 - \rho gh + \frac{W_T}{V_1} \rightarrow \; p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho gh - \frac{W_T}{V_1}$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho gh + \frac{Q_\vartheta}{V_1} \quad (3)$$

Όπου $\frac{Q_\vartheta}{V_1}$ η μηχανική ενέργεια ανά μονάδα όγκου, η οποία εμφανίζεται ως θερμική. Η (3) δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια τροποποιημένη εξίσωση Bernoulli!

dmargaris@gmail.com