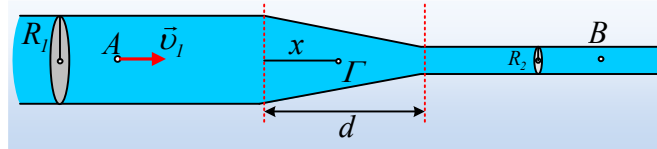


Η ροή στο στένωμα του σωλήνα.

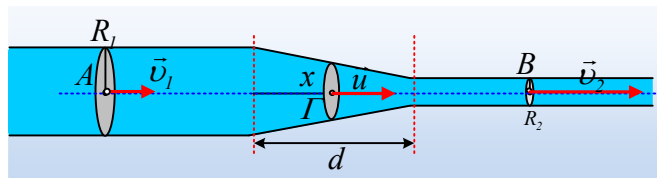
Ένας οριζόντιος κυλινδρικός σωλήνας ακτίνας $R_1=8\text{cm}$ κάποια στιγμή παρουσιάζει ένα στένωμα (σχήματος κόλουρου κώνου), μήκους $d=0,4\text{m}$, καταλήγοντας σε δεύτερο κυλινδρικό σωλήνα ακτίνας $R_2=4\text{cm}$. Στο σύστημα έχουμε μια μόνιμη και στρωτή ροή, όπου η ταχύτητα ροής στο σημείο Α είναι $v_1=0,9\text{m/s}$ ενώ η πίεση $p_1=8.000\text{N/m}^2$.



- i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα ροής καθώς και η πίεση στο σημείο Β του στενού σωλήνα.
- ii) Ένα σημείο Γ, βρίσκεται στον άξονα των δύο σωλήνων, στο μέσον του στενώματος, απέχοντας κατά $x=0,2\text{m}$ από το τέλος του φαρδιού σωλήνα.
 - α) Να υπολογισθεί η ταχύτητα ροής στο σημείο Γ.
 - β) Να βρεθεί η μεταβολή της κινητικής ενέργειας μιας μικρής ποσότητας ρευστού, όγκου $0,2\text{cm}^3$ κατά την μετακίνησή της, από το σημείο Α στο Γ.
 - γ) Ποια η τιμή της πίεσης στο σημείο Γ;

Το ρευστό θεωρείται ασυμπίεστο και ιδανικό, έχοντας πυκνότητα $\rho=1.000\text{kg/m}^3$.

Απάντηση:



- i) Από την εξίσωση της συνέχειας για τις διατομές των δύο σωλήνων στα σημεία Α και Β παίρνουμε:

$$A_A \cdot v_1 = A_B \cdot v_2 \rightarrow \pi R_1^2 \cdot v_1 = \pi R_2^2 \cdot v_2 \rightarrow$$

$$v_2 = \frac{R_1^2}{R_2^2} \cdot v_1 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \cdot v_1 = \left(\frac{8\text{cm}}{4\text{cm}}\right)^2 \cdot 0,9\text{m/s} = 3,6\text{m/s}$$

Εφαρμόζοντας τώρα την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων Α και Β της ρευματικής γραμμής του παραπάνω σχήματος:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \rightarrow$$

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_2^2 = 8.000\text{N/m}^2 + \frac{1}{2} 1000(0,9^2 - 3,6^2)\text{N/m}^2 = 1.925\text{N/m}^2.$$

- ii) Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα στο σημείο Γ, θα εφαρμόσουμε την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ

των δύο διατομών του παραπάνω σχήματος, στα σημεία Α και Γ:

$$A_A \cdot v_1 = A_\Gamma \cdot u \rightarrow \pi R_1^2 \cdot v_1 = \pi r^2 \cdot u \rightarrow R_1^2 \cdot v_1 = r^2 \cdot u \quad (1)$$

α) Ας έρθουμε τώρα σε μια τομή του στενώματος (του κόλλουρου κώνου), σχήματος τραπεζίου με βάσεις $2R_1$ και $2R_2$, όπως στο διπλανό σχήμα. Με βάση το σχήμα, η ακτίνα r της διατομής στο Γ, παίρνοντας τη διάμεσο του τραπεζίου, θα είναι:

$$r = \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{8\text{cm} + 4\text{cm}}{2} = 6\text{cm}$$

Και από την (1) παίρνουμε:

$$u = \frac{R_1^2}{r^2} \cdot v_1 = \frac{8^2}{6^2} \cdot 0,9\text{m/s} = 1,6\text{m/s}$$

β) Για μια μάζα ρευστού όγκου V , συνεπώς μάζας $m = \rho V$, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας κατά την μετακίνησή της από το Α στο Γ είναι:

$$\Delta K = K_\Gamma - K_A = \frac{1}{2} m u^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho V (u^2 - v_1^2) \rightarrow$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} \rho V (u^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} 1.000 \cdot 0,2 \cdot 10^{-6} (1,6^2 - 0,9^2) \text{J} = 1,75 \cdot 10^{-4} \text{J}$$

γ) Εφαρμόζοντας ξανά την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων Α και Γ της ρευματικής γραμμής του παραπάνω σχήματος:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_\Gamma + \frac{1}{2} \rho u^2 \rightarrow$$

$$p_\Gamma = p_1 + \left(\frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho u^2 \right) = p_1 + \frac{-\Delta K}{V}$$

$$p_\Gamma = p_1 - \frac{\Delta K}{V} = 8.000 \text{N/m}^2 - \frac{1,75 \cdot 10^{-4}}{0,2 \cdot 10^{-6}} \text{N/m}^2 = 7.125 \text{N/m}^2$$

Σχόλιο:

Βλέποντας κάποιος το σχήμα και το στένωμα, μπορεί να κάνει τη σκέψη, ότι σε αυτό, αυξάνεται η ταχύτητα από την τιμή $0,9\text{m/s}$ στην τιμή $3,6\text{m/s}$, οπότε στο μέσον της διαδρομής η ταχύτητα μπορεί να έχει τιμή:

$$u = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{0,9 + 3,6}{2} \text{m/s} = 2,25\text{m/s}$$

Πράγμα που προφανώς δεν συμβαίνει, όπως δεν συμβαίνει και η τιμή της πίεσης στο Γ να είναι ίση με το ημιάθροισμα:

$$p_\Gamma = \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{8.000 + 1.925}{2} \text{N/m}^2 = 4.962,5 \text{N/m}^2$$

Μην κάνουμε εύκολες και προφανώς λανθασμένες υποθέσεις...

Πράγματι, με τη βοήθεια της γεωμετρίας, προκύπτει ότι η ακτίνα της διατομής σε συνάρτηση με το x , δίνεται από τη σχέση:

$$r(x) = R_2 + \frac{d-x}{d}(R_1 - R_2) = (8 - 10x) \quad \text{το } x \text{ σε (m) } r \text{ σε (cm)}.$$

Αλλά τότε από την εξίσωση της συνέχειας:

$$u = \frac{R_1^2}{r^2} \cdot v_1 = \frac{8^2}{(8-10x)^2} \cdot 0,9 \text{ m/s} = \frac{57,6}{(8-10x)^2} \text{ m/s}$$

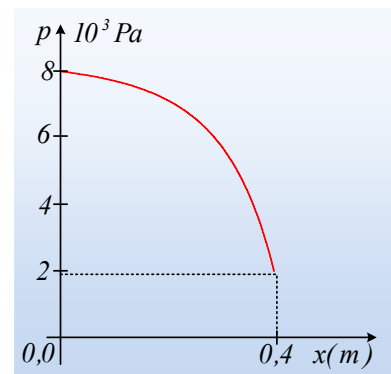
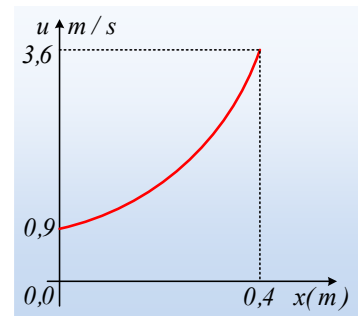
Με γραφική παράσταση, όπως στο διπλανό διάγραμμα.

Αλλά τότε από την εξίσωση Bernoulli:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p + \frac{1}{2} \rho u^2 \rightarrow$$

$$p = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho u^2 = 8.405 - 500 \frac{57,6^2}{(8-10x)^4}$$

Με μορφή όπως στο 2^ο διάγραμμα.



dmargaris@gmail.com