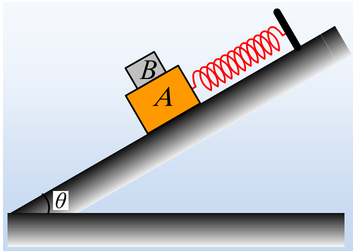
Μια ταλάντωση και η τριβή.



Ένα σώμα Α μάζας M=3kg ηρεμεί σε λείο κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως θ, δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100N/m. Τη στιγμή t_0=0, αφήνουμε πάνω στο σώμα Α, ένα δεύτερο σώμα Β, μάζας m=1kg, το οποίο εμφανίζει με το σώμα Α συντελεστή οριακής στατικής τριβής μ_s=1.

i) Τι θα συμβεί μόλις αφήσουμε ελεύθερο το Β σώμα;

α) Θα ισορροπήσει.

β) Θα κινηθεί προς τα κάτω, γλιστρώντας πάνω στο Α σώμα, το οποίο παραμένει στη θέση του.

γ) Θα κινηθεί προς τα κάτω, συμπαρασύροντας στην κίνησή του και το Α σώμα.

ii) Να υπολογιστεί η αρχική επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σώμα Β.

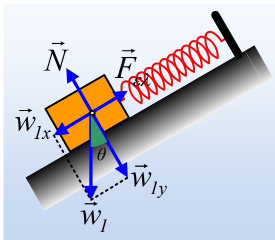
iii) Να αποδείξτε ότι το σύστημα των δύο σωμάτων Α και Β, θα εκτελέσει ΑΑΤ, υπολογίζοντας και το πλάτος ταλάντωσής του.

iv) Θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική, να βρεθεί η εξίσωση της επιτάχυνσης του συστήματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

v) Να γίνει η γραφική παράσταση της τριβής που ασκείται στο Β σώμα, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Δίνεται g=10m/s^2, ημθ=0,6 και συνθ=0,8.

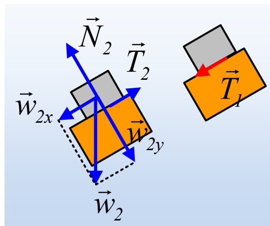
Απάντηση:



i) Το σώμα Α, πριν την τοποθέτηση πάνω του, του Β σώματος ισορροπεί, ενώ πάνω του ασκούνται οι δυνάμεις που έχουν σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα, οπότε:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow k \cdot \Delta\ell_1 = Mg\eta\mu\theta \quad (1)$$

Όπου $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου.



Μόλις τοποθετήσουμε πάνω του το Β σώμα, αυτό τείνει να κινηθεί προς τα κάτω εξαιτίας της συνιστώσας w_{2x}=mg·ημθ, αλλά τότε θα δεχτεί δύναμη τριβής T_2, αντίθετης κατεύθυνσης, όπως στο διπλανό σχήμα. Η αντίδραση της τριβής αυτής, είναι η δύναμη T_1 η οποία ασκείται στο Α σώμα, το οποίο θα πάψει να ισορροπεί και θα κινηθεί και αυτό προς τα κάτω. Σωστή η γ) πρόταση.

ii) Το ερώτημα που προκύπτει είναι, η ασκούμενη τριβή μεταξύ των δύο σωμάτων, είναι τριβή ολίσθησης ή στατική τριβή; Έστω ότι η ασκούμενη τριβή μεταξύ των δύο σωμάτων είναι στατική, οπότε τα σώματα θα κινηθούν μαζί με την ίδια επιτάχυνση. Εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα χωριστά και για τη στιγμή t_0 παίρνουμε:

$$\Sigma F_{x1}=M\alpha \rightarrow Mg\eta\mu\theta+T_{s1}-F_{\varepsilon\lambda}=M\alpha_0$$

$$\Sigma F_{x2}=m\alpha \rightarrow mg\eta\mu\theta-T_{s2}=m\alpha_0$$

Με πρόσθεση κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη ότι $T_{s1}=T_{s2}$ (ίσα μέτρα λόγω δράσης-αντίδρασης), ενώ Mg·ημθ=$F_{\varepsilon\lambda}$, σχέση (1), παίρνουμε:

$$mg \cdot \eta\mu\theta = (M+m)a_0 \rightarrow$$

$$a_0 = \frac{mg \cdot \eta\mu\theta}{M+m} = \frac{1 \cdot 10 \cdot 0{,}6}{3+1} m/s^2 = 1{,}5 m/s^2.$$

Αλλά τότε επιστρέφοντας στο σώμα Β:

$$mg\eta\mu\theta - T_{s2} = m\alpha_0 \rightarrow$$

$$T_{s2} = mg \cdot \eta\mu\theta - m\alpha_0 = 1 \cdot 10 \cdot 0{,}6N - 1 \cdot 1{,}5N = 4{,}5N$$

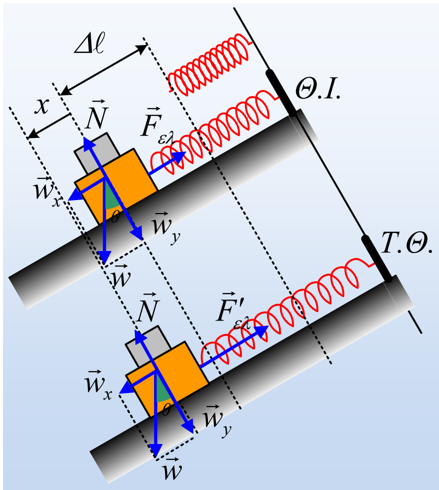
ενώ η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής, η οποία μπορεί να εμφανιστεί, η οριακή τριβή έχει μέτρο:

$$T_{op} = \mu_s \cdot N_2 = \mu_s \cdot mg \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 0{,}8N = 8N$$

αφού το σώμα ισορροπεί στην κάθετη προς το επίπεδο διεύθυνση και $\Sigma F_y=0$ ή $N_2=mg \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η ασκούμενη τριβή τη στιγμή $t_0=0$, είναι μικρότερη από την οριακή και το σώμα Β, δεν θα ολισθήσει πάνω στο Α σώμα, με αποτέλεσμα να κινηθούν μαζί με επιτάχυνση $1{,}5 m/s^2$.

iii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα των Α-Β, αντιμετωπίζοντάς το σαν ένα υλικό σημείο, στη θέση ισορροπίας και σε μια τυχαία θέση.



Θ.Ι.: $\Sigma F=0$ ή $\Sigma F_x=0 \rightarrow w_x=F_{\varepsilon\lambda}=k \cdot \Delta\ell$ (2)

$$\Delta\ell = \frac{(M+m)g \cdot \eta\mu\theta}{k} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 0{,}6}{100} m = 0{,}24m$$

Τ.Θ. $\Sigma F=\Sigma F_x=w_x-F_{\varepsilon\lambda}{'}= w_x-k \cdot (\Delta\ell+x)$ ή λόγω (2)

$$\Sigma F=\Sigma F_x= -k \cdot x$$

Συνεπώς το σύστημα εκτελεί ΑΑΤ γύρω από μια θέση, όπου το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta\ell=0{,}24m$, τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. Αλλά από την σχέση (1):

$$k \cdot \Delta\ell_1 = Mg\eta\mu\theta \rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{Mg\eta\mu\theta}{k} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 0{,}6}{100} m = 0{,}18m$$

συνεπώς η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, απέχει κατά 0,24m-0,18m=0,06m από την αρχική θέση που ξεκίνησε η ταλάντωση, με μηδενική ταχύτητα. Αλλά τότε η αρχική θέση, ήταν ακραία θέση της ταλάντωσης και Α=0,06m.

iv) Η εξίσωση της απομάκρυνσης του συστήματος, είναι της μορφής:

$$x=A \cdot \eta\mu(\omega t+\varphi_0) \quad (3)$$

Αλλά $\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}} = \sqrt{\frac{100}{3+1}} rad/s = 5 rad/s$

Ενώ τη στιγμή $t_0=0$, το σώμα βρίσκεται στη θέση x=+A, οπότε με αντικατάσταση στην (3):

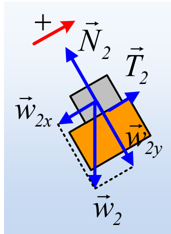
$$A=A \cdot \eta\mu\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Και η εξίσωση γράφεται: $x = 0{,}06 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I.)

Αλλά τότε η επιτάχυνση είναι της μορφής:

$$\alpha = -\omega^2 x = -1{,}5 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \ \text{(S.I.)}$$

v) Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής για το Β σώμα και με δεδομένο ότι η προς τα πάνω φορά θεωρείται θετική, παίρνουμε:

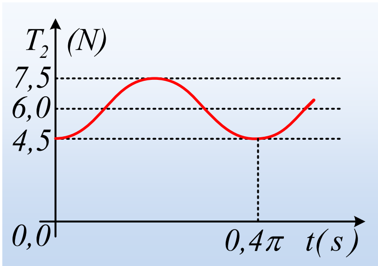


$$\Sigma F_x = ma \to T_2 - mg\eta\mu\theta = ma \to$$

$$T_2 = mg\eta\mu\theta + ma = 1 \cdot 10 \cdot 0{,}6 - 1 \cdot 1{,}5 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \to$$

$$T_2 = 6 - 1{,}5 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \ \text{(S.I.)}$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης, είναι η παρακάτω:



Σχόλιο:

Με βάση το παραπάνω διάγραμμα T-t βλέπουμε ότι η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής που εμφανίζεται είναι 7,5N, ενώ η οριακή τριβή έχει μέτρο 8N. Οπότε πράγματι, όχι απλά δεν ολίσθησε το σώμα Β πάνω στο Α, τη στιγμή t_0, αλλά δεν πρόκειται και να ολισθήσει σε όλη τη διάρκεια της κοινής τους ταλάντωσης.

dmargaris@gmail.com