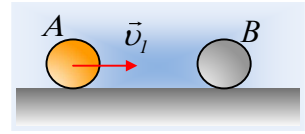


Κρούση σφαίρας με άλλη ακίνητη.

Μια σφαίρα Α μάζας $m_1=0,6\text{kg}$ κινείται (χωρίς να στρέφεται) σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $v_1=2\text{m/s}$ και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερη ακίνητη σφαίρα Β, ίσης ακτίνας και μάζας $m_2=0,4\text{kg}$.



- i) Να βρεθούν οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση.
- ii) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής και της κινητικής ενέργειας κάθε σφαίρας, που οφείλεται στην κρούση.
- iii) Κάποια στιγμή t_1 στη διάρκεια της κρούσης, η ταχύτητα της Α σφαίρας παίρνει την τιμή $u_1=1\text{m/s}$. Να υπολογιστεί η ολική κινητική ενέργεια των δύο σφαιρών τη στιγμή αυτή.
- iv) Ποια η ελάχιστη κινητική ενέργεια των δύο σφαιρών στη διάρκεια της κρούσης;

Απάντηση:

- i) Για τις ταχύτητες των δύο σφαιρών μετά την κρούση έχουμε:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{0,6\text{kg} - 0,4\text{kg}}{0,6\text{kg} + 0,4\text{kg}} 2\text{m/s} = 0,4\text{m/s}$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 \cdot 0,6\text{kg}}{0,6\text{kg} + 0,4\text{kg}} 2\text{m/s} = 2,4\text{m/s}$$

- ii) Για την Α σφαίρα έχουμε:

$$\Delta \vec{P}_A = \vec{P}'_A - \vec{P}_A \rightarrow \Delta P_A = m_1 v'_1 - m_1 v_1 = 0,6(0,4 - 2)\text{kgm/s} = -0,96\text{kgm/s}$$

$$\Delta K_1 = K'_1 - K_1 = \frac{1}{2} m_1 (v'^2_1 - v^2_1) = \frac{1}{2} 0,6(0,4^2 - 2^2)\text{J} = -1,152\text{J}$$

Για τη σφαίρα Β:

$$\Delta \vec{P}_B = \vec{P}'_B - \vec{P}_B \rightarrow \Delta P_B = m_2 v'_2 - 0 = 0,4 \cdot 2,4\text{kgm/s} = +0,96\text{kgm/s}$$

$$\Delta K_2 = K'_2 - K_2 = \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 = \frac{1}{2} 0,4 \cdot 2,4^2\text{J} = 1,152\text{J}$$

- iii) Στη διάρκεια της κρούσης, η συνολική ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή, οπότε εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για τις στιγμές πριν την κρούση και τη στιγμή t_1 παίρνουμε (θετική φορά προς τα δεξιά):

$$\vec{P}_{A,0} + \vec{P}_{B,0} = \vec{P}_{A,1} + \vec{P}_{B,1} \rightarrow$$

$$m_1 v_1 + 0 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \rightarrow$$

$$u_2 = \frac{m_1(v_1 - u_1)}{m_2} = \frac{0,6(2 - 1)}{0,4}\text{m/s} = 1,5\text{m/s}$$

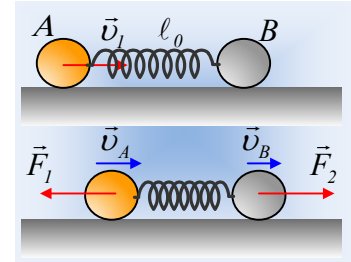
Οπότε η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι ίση:

$$K_{\text{ολ},1} = \frac{1}{2} m_1 u^2_1 + \frac{1}{2} m_2 u^2_2 = \frac{1}{2} (0,6 \cdot 1^2 + 0,4 \cdot 1,5^2)\text{J} = 0,75\text{J}$$

Αξίζει να συγκριθεί η παραπάνω τιμή της ολικής κινητικής ενέργειας, με την αρχική κινητική ενέργεια της Α σφαίρας, η οποία ήταν ίση:

$$K_{\text{αρχ}} = K_A = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} 0,6 \cdot 2^2 J = 1,2 J$$

iv) Με βάση το παραπάνω ερώτημα, η κινητική ενέργεια του συστήματος, δεν παραμένει σταθερή (σε αντίθεση με την ορμή!!!). Αυτό συμβαίνει επειδή στη διάρκεια της κρούσης, οι δύο σφαίρες παραμορφώνονται, οπότε ένα μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας, μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης. Θα μπορούσαμε να παρομοιάσουμε την κατάσταση με την περίπτωση που δίνεται στο διπλανό σχήμα. Η σφαίρα



Α πέφτει στο ελατήριο και αρχίζει να το παραμορφώνει, οπότε στις σφαίρες ασκούνται οι δυνάμεις από το ελατήριο, όπου η F_1 επιβραδύνει την Α και η F_2 επιταχύνει τη Β σφαίρα. Για όσο χρόνο ισχύει $v_A > v_B$, το μήκος του ελατηρίου μικραίνει, ενώ όταν $v_A < v_B$ το ελατήριο αποσυμπιέζεται αυξάνοντας το μήκος του. Συνεπώς τη μέγιστη συσπίρωση το ελατήριο την εμφανίζει τη στιγμή που $v_A = v_B$. Αλλά τότε τη στιγμή αυτή η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι μέγιστη, οπότε από τη διατήρηση της ενέργειας, συμπεραίνουμε ότι η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι η ελάχιστη δυνατή.

Έτσι από την διατήρηση της ορμής του συστήματος παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{A,0} + \vec{P}_{B,0} &= \vec{P}_{A,2} + \vec{P}_{B,2} \rightarrow \\ m_1 v_1 + 0 &= (m_1 + m_2) v_k \rightarrow \\ v_k &= \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)} = \frac{0,6 \cdot 2}{0,6 + 0,4} m/s = 1,2 m/s \end{aligned}$$

Οπότε η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος τη στιγμή αυτή είναι:

$$K_{\text{min}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_k^2 = \frac{1}{2} (0,6 + 0,4) \cdot 1,2^2 J = 0,72 J$$

Σχόλια:

- 1) Ας δούμε λίγο της μεταβολές της ορμής και της κινητικής ενέργειας στο ii) ερώτημα. Για τις ορμές ισχύει ότι $\Delta \vec{P}_A = -\Delta \vec{P}_B$ πράγμα που σημαίνει ότι τα δύο διανύσματα είναι αντίθετα. Ενώ για τις κινητικές ενέργειες η σχέση $\Delta K_2 = -\Delta K_1$ συνδέει μονόμετρα μεγέθη και απλά μας λέει ότι όσο μειώνεται η κινητική ενέργεια της Α σφαίρας, τόσο αυξάνεται η κινητική ενέργεια της Β. Αξίζει να τονισθεί ότι:

Η ισότητα για τις μεταβολές της ορμής θα ίσχυε και σε μια ανελαστική κρούση, σε αντίθεση με τις αντίστοιχες μεταβολές στις κινητικές ενέργειες, όπου θα είχαμε απώλεια μηχανικής ενέργειας.

- 2) Στις ελαστικές κρούσεις, δεν πρέπει να συνδέεται η αρχή διατήρησης της ορμής (Α.Δ.Ο.) με την κινητική ενέργεια!

- i) Πρώτα-πρώτα δεν υπάρχει Α.Δ.Κ.Ε.!!! Αυτό είναι εφεύρημα...
- ii) Απλά η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος, είναι ίση με την κινητική του ενέργεια μετά την κρούση. Στη διάρκεια της κρούσης όμως, ένα μέρος της μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης των σωμάτων. Απλά αν η κρούση είναι ελαστική, η δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης $\left(\frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2\right)$, ξαναμετατρέπεται σε κινητική.

dmargaris@gmail.com