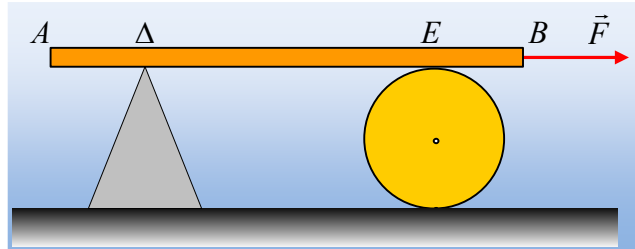


Τραβώντας μια δοκό οριζόντια.

Η ομογενής δοκός AB μήκους $\ell = 6\text{m}$ και μάζας $M=12\text{kg}$ ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη σε λείο υποστήριγμα στο σημείο της Δ και σε κύλινδρο μάζας $m=8\text{ kg}$ στο σημείο E, όπως στο σχήμα.



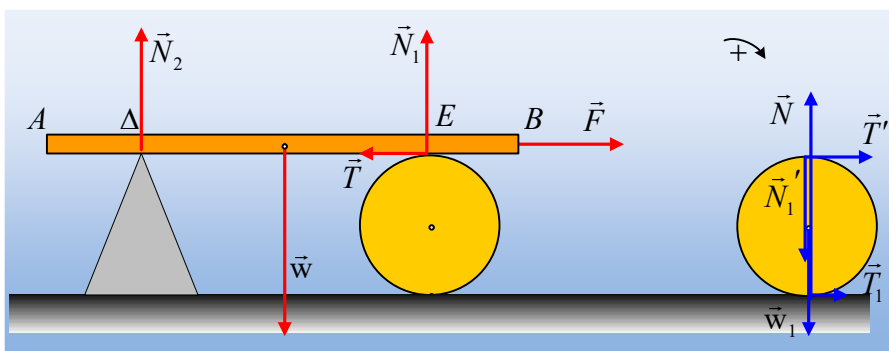
Σε μια στιγμή ασκούμε στη δοκό οριζόντια σταθερή δύναμη $F=30\text{N}$, με αποτέλεσμα η δοκός να κινηθεί, συμπαρασύροντας και τον κύλινδρο. Αν δεν παρατηρείται ολίσθηση, ούτε μεταξύ δοκού και κυλίνδρου, ούτε μεταξύ κυλίνδρου και εδάφους, ενώ $(A\Delta) = (EB)=1\text{m}$, να βρεθούν:

- i) Η επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου (a_{cm}).
- ii) Η επιτάχυνση της δοκού.
- iii) Η απόσταση (BE') του άκρου της δοκού και του σημείου επαφής της E' με τον κύλινδρο, τη στιγμή που η δοκός χάνει την επαφή με το ακλόνητο στήριγμα.
- iv) Ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής, τον οποίο εμφανίζει ο κύλινδρος με τη δοκό και το έδαφος για να μπορέσει να πραγματοποιηθεί η παραπάνω μετακίνηση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

Στο αριστερό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις μόνο στη δοκό, ενώ δεξιά στον κύλινδρο, όπου T η στατική τριβή που ασκείται από τον κύλινδρο στη δοκό και T' η αντίδρασή της που ασκείται στον κύλινδρο. Εξάλλου T_1 είναι η στατική τριβή που ασκείται στον κύλινδρο από το έδαφος.



- i) Για την κίνηση της δοκού ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα μας δίνει:

$$\Sigma F = Ma \rightarrow F - T = M \cdot a \quad (1)$$

Θεωρώντας σύνθετη την κίνηση του κυλίνδρου, θα έχουμε:

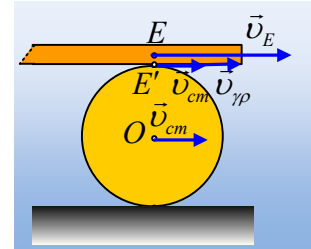
Μεταφορική κίνηση: $T' + T_1 = m \cdot a_{cm} \quad (2)$

Στροφορική κίνηση: $T' \cdot R - T_1 R = I \cdot \alpha_{γων} \rightarrow T' - T_1 = \frac{1}{2} mR \cdot \alpha_{γων} \quad (3)$

Αλλά ο κύλινδρος δεν ολισθαίνει στο έδαφος, συνεπώς κυλίνεται και $a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$ και με πρόσθεση των (2) και (3) κατά μέλη παίρνουμε:

$$2T' = \frac{3}{2} ma_{cm} \rightarrow T = \frac{3}{4} ma_{cm} \quad (4)$$

Υπάρχει εδώ κάποιος σύνδεσμος που θα μας επιτρέψει να «συνδέσουμε» την κίνηση της δοκού με την κίνηση του κυλίνδρου; Ας εστιάσουμε στο σημείο επαφής τους. Για να μην γλιστρά η δοκός, θα πρέπει η ταχύτητά της (v_E) να είναι ίση με την ταχύτητα του σημείου E' του κυλίνδρου που έρχεται σε επαφή με τη δοκό.



Αλλά $v_E = v_{cm} + v_{\gamma p} = v_{cm} + \omega \cdot R = v_{E'}$. Με παραγώγιση παίρνουμε:

$$\frac{dv_E}{dt} = \frac{dv_{cm}}{dt} + \frac{d(\omega R)}{dt} \rightarrow$$

$$\alpha = \alpha_{cm} + \alpha_{\gamma\omega\nu} R = 2\alpha_{cm} \quad (5)$$

Με πρόσθεση τώρα κατά μέλη των (1) και (4) λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (5) παίρνουμε:

$$F = M \cdot \alpha + \frac{3}{4} ma_{cm} \rightarrow F = \left(2M + \frac{3m}{4} \right) a_{cm} \rightarrow$$

$$a_{cm} = \frac{F}{2M + \frac{3m}{4}} = \frac{30}{2 \cdot 12 + \frac{3}{4} \cdot 8} m/s^2 = 1 m/s^2$$

ii) Οπότε η δοκός με βάση την (5) αποκτά επιτάχυνση $\alpha = 2\alpha_{cm} = 2 m/s^2$.

iii) Για να χαθεί η επαφή της δοκού με το ακίνητο στήριγμα, πρέπει να μετατοπισθεί κατά $x_1 = 1m$, όπου:

$$x_1 = \frac{1}{2} at^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2x_1}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{2}} s = 1s$$

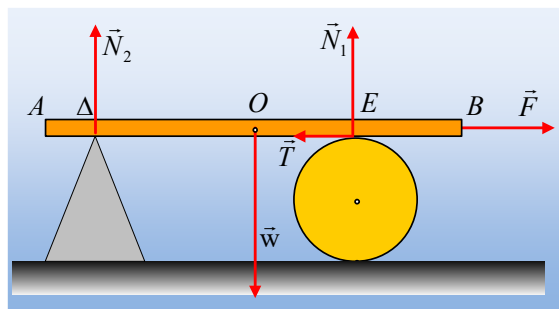
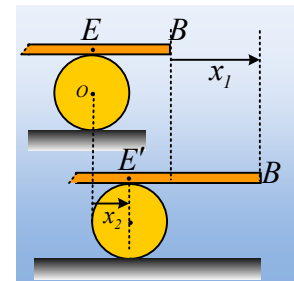
Αλλά τότε ο κύλινδρος έχει μετατοπισθεί κατά:

$$x_2 = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1^2 m = 0,5m$$

και η εικόνα είναι αυτή του διπλανού σχήματος, από όπου προκύπτει ότι:

$$(BE') = (EB) + x_1 - x_2 = 1,5m.$$

iv) Έστω κάποια στιγμή που η δοκός έχει μετατοπισθεί κατά x .



Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, ο άξονας του κυλίνδρου έχει μετατοπισθεί κατά $\frac{1}{2}x$ και το σημείο επαφής δοκού-κυλίνδρου απέχει κατά $(1+x/2)$ από το άκρο Β. Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό.

Η δοκός δεν περιστρέφεται, οπότε $\Sigma\tau_0=0$ ή

$$N_1\left(\frac{\ell}{2}-l-\frac{x}{2}\right)-N_2\left(\frac{\ell}{2}-l+x\right)=0 \rightarrow$$

$$N_1\left(2-\frac{x}{2}\right)=N_2(2+x) \rightarrow \frac{N_1}{N_2}=\frac{4+2x}{4-x} > 1 \quad (5)$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι καθώς η δοκός κινείται προς τα δεξιά η κάθετη αντίδραση N_1 από τον κύλινδρο αυξάνεται, ενώ μειώνεται η αντίδραση από το στήριγμα. Αλλά τότε αυξάνεται και η οριακή στατική τριβή, που θα μπορούσε να ασκηθεί (για ορισμένη τιμή του συντελεστή οριακής στατικής τριβής), αφού $T_{op}=\mu_s \cdot N_1$.

Αλλά τότε για να μην έχουμε ολίσθηση, θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ώστε η τριβή να είναι στατική, στην αρχική θέση, όπου έχουμε την μικρότερη αντίδραση από τον κύλινδρο.

Αλλά από την εξίσωση (4) παίρνουμε $T=\frac{3}{4}ma_{cm}=\frac{3}{4}8 \cdot 1N=6N$, ενώ αφού η ράβδος ισορροπεί

στην κατακόρυφη διεύθυνση $\Sigma F_y=0$ ή $N_1+N_2=w=120N$. Όμως από την (5) για $x=0$ βρίσκουμε $N_1=N_2$, οπότε: $N_1+N_2=120N \rightarrow 2N_1=120N$ ή $N_1=60N$.

Για να μην ολισθήσει όμως η δοκός πρέπει η ασκούμενη τριβή να είναι στατική, δηλαδή:

$$T \leq T_{op} \rightarrow T \leq \mu_s N_1 \quad \text{ή} \quad \mu_s \geq \frac{T}{N_1} \rightarrow \mu_s \geq \frac{6}{60} \rightarrow \mu_s \geq 0,1$$

Συνεπώς ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ δοκού και κυλίνδρου, για να μην έχουμε ολίσθηση, είναι $\mu_s = 0,1$.

Ερχόμαστε τώρα στην (2): $T'+T_l=m \cdot a_{cm} \rightarrow T_l=ma_{cm}-T=8 \cdot 1N-6N=2N$, ενώ:

$$N=N_l'+w_l=N_l+mg=60N+80N=140N.$$

Με την ίδια, όπως παραπάνω λογική, θα πρέπει να ισχύει:

$$T_l \leq T_{op} \rightarrow T_l \leq \mu_{s/l} N \quad \text{ή} \quad \mu_{s/l} \geq \frac{T_l}{N} \rightarrow \mu_{s/l} \geq \frac{2}{140} \rightarrow \mu_{s/l} \geq \frac{1}{70}$$

Συνεπώς ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου, για να μην έχουμε ολίσθηση, είναι $\mu_{s/l} = \frac{1}{70}$.

dmargaris@gmail.com