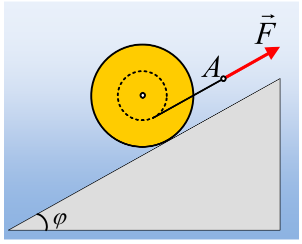
Ένας κύλινδρος σε κεκλιμένο επίπεδο.



Ο κύλινδρος του σχήματος ακτίνας R=0,2 m και μάζα 5kg, έχει εγκοπή βάθους ½ R στην οποία έχει τυλιχθεί ένα αβαρές νήμα, στο άκρο Α του οποίου ασκούμε δύναμη F, παράλληλη στο επίπεδο.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του, ο οποίος συνδέει τα κέντρα των δύο βάσεων I= ½ mR^2, ημφ=0,6 και συνφ=0,8, ενώ g=10m/s^2.

i) Αν το επίπεδο είναι λείο, να εξετάσετε αν μπορεί να ισορροπεί ο κύλινδρος ασκώντας κατάλληλη δύναμη F.

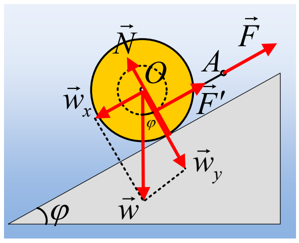
ii) Αν υπάρχουν τριβές και δίνονται οι συντελεστές τριβής μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου μ=μ$_s$=0,8, να βρεθεί το μέτρο της δύναμης F, ώστε ο κύλινδρος να ισορροπεί.

iii) Αν η ασκούμενη δύναμη έχει μέτρο F=45N να σχεδιάστε την ασκούμενη τριβή στον κύλινδρο, δικαιολογώντας την κατεύθυνσή της.

iv) Για την παραπάνω περίπτωση να υπολογιστούν η επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου, καθώς και η γωνιακή του επιτάχυνση.

v) Να υπολογιστούν ξανά η επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου, καθώς και η γωνιακή του επιτάχυνση στην περίπτωση που η ασκούμενη δύναμη έχει μέτρο F=90N.

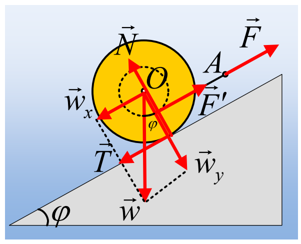
Απάντηση:



i) Έστω ότι το επίπεδο είναι λείο. Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο, όπου F΄=F η δύναμη που ασκείται στον κύλινδρο μέσω του νήματος (η τάση του νήματος). Αλλά τότε ως προς το κέντρο μάζας O του κυλίνδρου έχουμε:

$$\Sigma\tau = F' \cdot \tfrac{1}{2} R \neq 0$$

Πράγμα που σημαίνει ότι ο κύλινδρος θα περιστραφεί και αυτό θα συμβεί ανεξάρτητα του μέτρου της ασκούμενης δύναμης F, οπότε ο κύλινδρος δεν μπορεί να ισορροπεί.



ii) Για να ισορροπήσει ο κύλινδρος θα πρέπει να ασκηθεί πάνω του στατική τριβή, με φορά όπως στο διπλανό σχήμα, ώστε να εξασφαλίζεται ότι Στ=0, ως προς το κέντρο μάζας Ο. Αλλά τότε:

$$\Sigma\tau_O = 0 \rightarrow F' \cdot \tfrac{1}{2} R - T \cdot R = 0 \rightarrow F = F' = 2T \ (1)$$

$$\Sigma F = 0 \text{ ή } \Sigma F_x = 0 \rightarrow F' = w_x + T \ (2)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$2T = mg \cdot \eta\mu\varphi + T \rightarrow T = mg \cdot \eta\mu\varphi = 5 \cdot 10 \cdot 0{,}6N = 30N$$

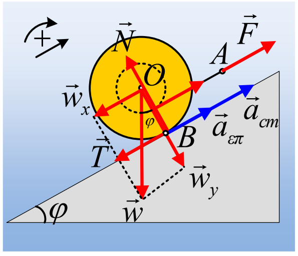
Οπότε $F = 2T = 60N$.

Το ερώτημα βέβαια είναι, αν μπορεί να αναπτυχθεί η παραπάνω τιμή στατικής τριβής, ώστε να ισορροπεί ο κύλινδρος. Από την ισορροπία στην διεύθυνση y έχουμε $N=w_y=mg·συνθ$, οπότε:

$$T_{s/max}=T_{oρ}=\mu_s·N=\mu_s·mg·συνθ=0,8·5·10·0,8N=32N$$

Μεγαλύτερη, από την τριβή που είναι απαραίτητη για την ισορροπία (T=30N) . Συνεπώς η ισορροπία μπορεί να επιτευχθεί με την άσκηση δύναμης F=60N.

iii) Ας παραβλέψουμε προς το παρόν την τριβή και ας δούμε προς τα πού πρόκειται να κινηθεί το σημείο B, σημείο επαφής του κυλίνδρου με το επίπεδο, με την επίδραση των υπολοίπων δυνάμεων. Αλλά επειδή $F>w_x=30N$ ο κύλινδρος θα αποκτήσει επιτάχυνση $α_{cm}$ με φορά προς τα πάνω ($F-w_x=mα_{cm}$), ενώ εξαιτίας της περιστροφικής κίνησης του κυλίνδρου (θεωρώντας θετική την ωρολογιακή φορά: $Στ=I·α_{γων}$ ή $-F· ½ R=I·α_{γων}$) το σημείο B θα έχει τις επιταχύνσεις που έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα, όπου $α_{επ}=α_{γων}·R$ και θα τείνει να κινηθεί προς τα πάνω. Αλλά τότε η τριβή που θα ασκηθεί θα έχει φορά προς τα κάτω, όπως στο σχήμα.



iv) Έστω τώρα ο κύλινδρος επιταχύνεται προς τα πάνω κυλιόμενος (πράγμα που σημαίνει ότι στρέφεται όπως οι δείκτες του ρολογιού και δεν ολισθαίνει). Θεωρώντας την κίνηση σύνθετη, μια μεταφορική και μια περιστροφική, εφαρμόζουμε, για καθεμιά, το 2ο νόμο του Νεύτωνα:

Μεταφορική κίνηση: $ΣF=mα_{cm} \rightarrow F\text{-}w_x\text{-}T=m·α_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $Στ=I·α_{γων} \rightarrow T·R\text{-} F· ½ R = ½ mR^2·α_{γων} \rightarrow 2T\text{-}F=mR·α_{γων}$ (2)

Υποθέτοντας ότι έχουμε κύλιση ισχύει επίσης $α_{cm}=α_{γων}·R$ (3), οπότε το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) και (3) γίνεται:

$$\left.\begin{array}{l} 2F\text{-}2w_x\text{-}2T=2m·α_{cm} \\ 2T\text{-}F=m·α_{cm} \end{array}\right\} \overset{+}{\Longrightarrow} F\text{-}2w_x=3m·α_{cm} \quad (4) \rightarrow$$

$$a_{cm}=\frac{F-2mgημφ}{3m}=\frac{45N-2\cdot 5\cdot 10\cdot 0,6N}{3\cdot 5kg}=-1m/s^2.$$

Αλλά τότε, από την (1) $T=F\text{-}mg·ημφ\text{-}mα_{cm}=45N\text{-}5·10·0,6N\text{-}5·(\text{-}1)N=20N$, πράγμα που σημαίνει ότι πράγματι η τριβή έχει φορά προς τα κάτω και είναι στατική ($T_{oρ}$=32N), οπότε από την εξίσωση (2) παίρνουμε:

$$a_{γων}=\frac{2T-F}{mR}=\frac{2\cdot 20-45}{5\cdot 0,2}rad/s^2=-5rad/s^2.$$

Πράγμα που σημαίνει ότι ο κύλινδρος κατέρχεται κατά μήκος του επιπέδου στρεφόμενος αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού, αντίθετα από ότι αρχικά υποθέσαμε.

Σημείωση: Θα έλεγε κάποιος ότι μπορούσαμε να πάρουμε τη σχέση (3) και αφού βρήκαμε την $α_{cm}$ να βρούμε στη συνέχεια την $α_{γων}$. Να τονισθεί λοιπόν ότι η σχέση (3) συνδέει **τα μέτρα** των $α_{cm}$ και $α_{γων}$ και όχι τις αλγεβρικές τιμές τους.

v) Δουλεύουμε ακριβώς με τον ίδιο, όπως στο προηγούμενο ερώτημα, υποθέτοντας ότι ο κύλινδρος κυλίεται προς τα πάνω και παίρνουμε από την (4):

$$a_{cm}=\frac{F-2mg\eta\mu\varphi}{3m}=\frac{90N-2\cdot 5\cdot 10\cdot 0{,}6N}{3\cdot 5kg}=+2m/s^2.$$

$$\text{Αλλά και } a_{\gamma\omega\nu}=\frac{a_{cm}}{R}=\frac{2}{0{,}2}rad/s^2=10rad/s^2.$$

Ισχύει η υπόθεση ότι ο κύλινδρος κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει); Υπολογίζουμε την τριβή:

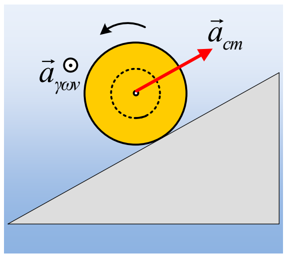
$$T=F-mg\cdot\eta\mu\varphi-m\alpha_{cm}=90N-5\cdot 10\cdot 0{,}6N-5\cdot 2N=50N$$

Αλλά τέτοια τιμή στατικής τριβής δεν μπορεί να υπάρξει, συνεπώς ο κύλινδρος δεν μπορεί να κυλίεται, αλλά υπάρχει περιστροφή με ταυτόχρονη ολίσθηση, οπότε $T=T_{ολ}=32N$ και επιστρέφοντας στις εξισώσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$F-w_x-T_{o\lambda}=m\cdot\alpha_{cm}\ \rightarrow\ a_{cm}=\frac{F-mg\eta\mu\varphi-T_{o\lambda}}{m}=\frac{90N-5\cdot 10\cdot 0{,}6N-32N}{5kg}=+5{,}6m/s^2.$$

$$2T-F=mR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\ \rightarrow\ a_{\gamma\omega\nu}=\frac{2T_{o\lambda}-F}{mR}=\frac{2\cdot 32-90}{5\cdot 0{,}2}rad/s^2=-26rad/s^2.$$

Πράγμα που σημαίνει ότι ο κύλινδρος επιταχύνεται προς τα πάνω κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου, ενώ ταυτόχρονα επιταχύνεται στροφικά, στρεφόμενος αριστερόστροφα (αντίθετα από την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού), όπως δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



dmargaris@gmail.com