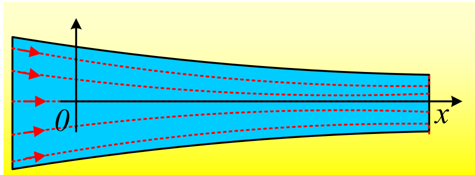
Μόνιμη και μη μόνιμη στρωτή ροή.



Στο διπλανό σχήμα εμφανίζονται οι ρευματικές γραμμές για μια στρωτή και μόνιμη ροή νερού, το οποίο ας θεωρήσουμε ιδανικό ρευστό, εντός ενός οριζόντιου σωλήνα. Έστω κατά μήκος μιας ευθύγραμμης ρευματικής γραμμής ένας άξονας x. Στη θέση x=0, η πίεση είναι $p_0=2\cdot 10^5 N/m^2$, ενώ η πυκνότητα του νερού είναι $\rho=1.000 kg/m^3$.

i) Αν η ταχύτητα ροής του νερού κατά μήκος του άξονα δίνεται από την εξίσωση υ=1+2x (S.I.), να υπολογιστούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση ενός σωματιδίου νερού, καθώς και η πίεση στη θέση x=2m.

ii) Αν η ροή δεν είναι μόνιμη, αφού η ταχύτητα σε κάθε θέση x, δίνεται από την εξίσωση υ=1+2x+0,2t (S.I) να βρεθούν:

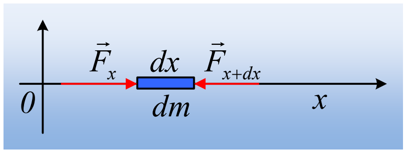
α) Η ταχύτητα και η επιτάχυνση ενός σωματιδίου ρευστού στη θέση x=2m σε συνάρτηση με το χρόνο.

β) Η πίεση στη θέση x=2m σε συνάρτηση με το χρόνο.

Απάντηση:

i) Προφανώς η ταχύτητα του σωματιδίου ρευστού, καθώς περνάει από τη θέση x=2m θα είναι:

υ=1+2x=5m/s.



Αν στη θέση x πάρουμε μια στοιχειώδη μάζα dm, σχήματος κυλινδρικού, ύψους dx και διατομής dA, αυτή θα έχει ταχύτητα υ=1+2x οπότε:

$$\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt}=\upsilon\cdot\frac{d\upsilon}{dx} \quad \text{ή}$$

$$a=\alpha_{\varepsilon\pi}=\upsilon\cdot\frac{d\upsilon}{dx}\rightarrow$$

$$a=\alpha_{\varepsilon\pi}=2\cdot\upsilon$$

Αλλά τότε:

$$\alpha=2\cdot 5m/s^2=10\ m/s^2.$$

Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα για τη μάζα dm και έχουμε:

$$\Sigma F_x=m\cdot\alpha\rightarrow F_x\text{-}F_{x+dx}=dm\cdot\left(\upsilon\cdot\frac{d\upsilon}{dx}\right)\rightarrow$$

$$pdA-(p+dp)\cdot dA=\rho(dx\cdot dA)\left(\frac{d\upsilon}{dx}\cdot\upsilon\right)\rightarrow$$

$$dp+\rho\upsilon\cdot d\upsilon=0 \quad \text{(Εξίσωση Euler)}$$

Οπότε ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\int_0^x dp + \int_0^x \rho\upsilon d\upsilon = 0 \rightarrow$$

$$[p]_0^x + \left[\frac{1}{2}\rho\upsilon^2\right]_0^x = 0$$

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_0^2 = p_x + \frac{1}{2}\rho\upsilon_x^2$$ εξίσωση Bernoulli.

Αλλά τότε:

$$p_x = p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_0^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_x^2 \text{ ή}$$

$$p_x = 2\cdot 10^5\,Pa + \frac{1}{2}1.000(1-5^2)Pa = 188.000\,Pa$$

ii) Αν η ταχύτητα ροής κατά μήκος του άξονα x, δίνεται από την εξίσωση υ=1+2x+0,2t (S.I), τότε η ροή δεν θα είναι μόνιμη, αφού η ταχύτητα σε ένα σημείο, εξαρτάται από το χρόνο. Έτσι στη θέση x=2m η ταχύτητα κάθε σωματιδίου ρευστού θα είναι:

υ=1+2x+0,2t=5+0,2t (S.I.)

Αν στη θέση x πάρουμε μια στοιχειώδη μάζα dm, σχήματος κυλινδρικού, ύψους dx και διατομής dA, αυτή θα έχει ταχύτητα υ=1+2x+0,2t, οπότε:

$$d\upsilon = \frac{\partial\upsilon}{\partial x}dx + \frac{\partial\upsilon}{\partial t}dt \quad \rightarrow \quad \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\partial\upsilon}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\upsilon}{\partial t} \quad \text{ή}$$

$$a = \alpha_{\varepsilon\pi} = \frac{\partial\upsilon}{\partial x}\cdot\upsilon + \frac{\partial\upsilon}{\partial t} \rightarrow$$

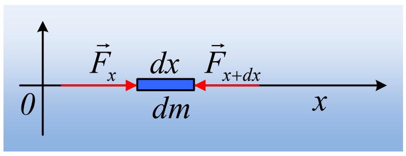
$$a = \alpha_{\varepsilon\pi} = 2\cdot\upsilon + 0{,}2$$

$$a = 2\cdot(1+2x+0{,}2t) + 0{,}2 = 2{,}2 + 4x + 0{,}4t \text{ (S.I.)}$$

Οπότε για τη θέση x=2m έχουμε:

$$a = 2{,}2 + 4\cdot 2 + 0{,}4t = 10{,}2 + 0{,}4t \text{ (S.I.)}$$

Αλλά τότε από το 2^{o} νόμο του Νεύτωνα για τη μάζα dm έχουμε:



$$\Sigma F_x = m\cdot\alpha \rightarrow F_x - F_{x+dx} = dm\cdot\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\cdot\upsilon + \frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right) \rightarrow$$

$$pdA - (p+dp)\cdot dA = \rho(dx\cdot dA)\left(\frac{d\upsilon}{dx}\cdot\upsilon + \frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right) \rightarrow$$

$$dp + \rho\upsilon\cdot d\upsilon + \rho\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\cdot dx = 0$$ (Εξίσωση Euler)

Οπότε ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\int_0^x dp + \int_0^x \rho\upsilon\cdot d\upsilon + \int_0^x \rho\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\cdot dx = 0 \rightarrow$$

$$\left[p\right]_0^x + \left[\frac{1}{2}\rho\upsilon_0^2\right]_0^x + \left[\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial t}x\right]_0^x = 0$$

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_0^2 = p_x + \frac{1}{2}\rho\upsilon_x^2 + \rho\frac{\partial\upsilon}{\partial t}x$$ εξίσωση Bernoulli.

Η παραπάνω εξίσωση είναι ο αντίστοιχη εξίσωση Bernoulli για την μη μόνιμη ροή κατά μήκος του άξονα x, όπου p_0 και υ_0 η πίεση και η ταχύτητα στη θέση x=0.

Αλλά $\frac{\partial\upsilon}{\partial t} = 0,2m/s^2$ οπότε με αντικατάσταση:

$$p_x = p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_0^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_x^2 + -\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial t}x \text{ ή}$$

$$p_x = 2\cdot 10^5 + \frac{1}{2}1.000\left((1+0,2t)^2 - (5+0,2t)^2\right) - 1.000\cdot 0,2\cdot 2 \rightarrow$$

$$p_x = 187.600 - 800t \quad \text{(S.I.)}$$

dmargaris@gmail.com