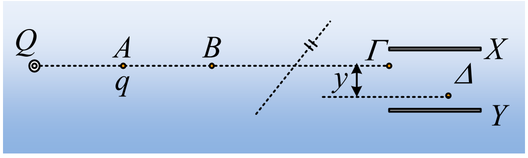
Δυο επιταχυνόμενες κινήσεις φορτισμένης σφαίρας.



Ένα σημειακό φορτίο Q=1μC βρίσκεται ακλόνητο στο σημείο Ο του σχήματος. Στο σημείο Α, όπου (ΟΑ)=1cm αφήνεται ελεύθερη μια πολύ μικρή φορτισμένη σφαίρα μάζας m και φορτίου q=1μC. Η σφαίρα επιταχύνεται και αφού απομακρυνθεί από το ηλεκτρικό πεδίο του φορτίου Q, μπαίνει στο σημείο Γ, στο ηλεκτρικό πεδίο ενός επίπεδου πυκνωτή με οριζόντιους οπλισμούς που απέχουν κατά 1cm, χωρητικότητας C=0,1nF. Το σημείο Γ απέχει 0,3cm από τον πάνω οπλισμό του πυκνωτή. Μετά από λίγο η σφαίρα φτάνει στο σημείο Δ, έχοντας κατακόρυφη εκτροπή y=0,5cm. Ο πυκνωτής έχει φορτισθεί με φορτίο Q_1=1μC ενώ θεωρούμε ότι το δυναμικό στο σημείο Γ είναι μηδέν, μιας και βρίσκεται σε άπειρη απόσταση από το Q.

i) Να υπολογιστεί το δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου και η δυναμική ενέργεια της σφαίρας στο σημείο Α, καθώς και η κινητική της ενέργεια τη στιγμή που περνά από το σημείο Β, όπου (ΑΒ)=1cm.

ii) Ποιος οπλισμός ο Χ ή ο Υ φέρει θετικό φορτίο; Να υπολογιστούν τα δυναμικά των οπλισμών του πυκνωτή.

iii) Να υπολογιστεί το δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή στο σημείο Δ, καθώς και η κινητική ενέργεια της φορτισμένης σφαίρας στο Δ.

iv) Να βρεθεί ο λόγος α_A/α_Δ των επιταχύνσεων της σφαίρας στα σημεία Α και Δ.

Οι βαρυτικές δυνάμεις θεωρούνται αμελητέες ενώ $k_c=9\cdot 10^9 N\cdot m^2/C^2$.

Απάντηση:

i) Το δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου του φορτίου Q στο σημείο Α είναι:

$$V_A = k_c \frac{Q}{r_A} = 9\cdot 10^9 \frac{1\cdot 10^{-6}}{1\cdot 10^{-2}} V = 9\cdot 10^5 V$$

Ενώ η φορτισμένη σφαίρα έχει δυναμική ενέργεια εξαιτίας της αλληλεπίδρασής της με το φορτίο Q (ισοδύναμα επειδή βρίσκεται σε ηλεκτρικό πεδίο):

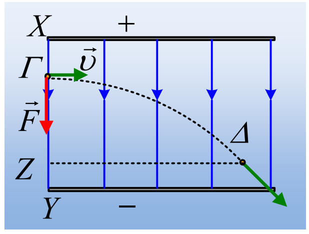
$$U_A = qV_A = 1\cdot 10^{-6}\cdot 9\cdot 10^5 J = 0,9J$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την σφαίρα μεταξύ των θέσεων Α και Β:

$$K_B - K_A = W_{F/A\to B} \rightarrow$$

$$K_B = q(V_A - V_B) = q\left(V_A - k_c\frac{Q}{r_B}\right) = 10^{-6}\left(9\cdot 10^5 - 9\cdot 10^9\frac{10^{-6}}{2\cdot 10^{-2}}\right)J = 0,45J$$

ii) Μόλις η φορτισμένη σφαίρα φτάσει στο σημείο Γ και μπει στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή, εκτρέπεται προς τα κάτω και φτάνει στο σημείο Δ. Αλλά αυτό σημαίνει ότι η δύναμη που δέχεται από το πεδίο είναι κατακόρυφη, όπως στο παρακάτω σχήμα. Αλλά τότε και οι δυναμικές γραμμές έχουν φορά προς τα κάτω (q>0), πράγμα που σημαίνει ότι ο οπλισμός Χ φέρει θετικό φορτίο.



Για τη διαφορά δυναμικού μεταξύ του πάνω οπλισμού Χ και του σημείου Γ, ισχύει:

$$V_X - V_\Gamma = \frac{W_{X\to\Gamma}}{q_1}$$

Όπου $W_{X\to\Gamma}$ το έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση κάποιου φορτίου q_1 από το άκρο του πάνω οπλισμού, στο σημείο Γ, κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής. Αλλά, λαμβάνοντας υπόψη ότι μεταξύ τάσης του πυκνωτή και τάσης φόρτισης $E = \frac{V_{XY}}{\ell}$, ενώ $C = \frac{Q_1}{V_{XY}}$ τότε:

$$V_X - V_\Gamma = \frac{Fd_1}{q_1} = \frac{Eq_1 d_1}{q_1} = E\cdot d_1 = \frac{V_{XY}}{\ell}d_1 = \frac{Q_1}{C\ell}d_1$$

Αλλά αφού $V_\Gamma=0$:

$$V_X = \frac{Q_1}{C\ell}d_1 = \frac{10^{-6}}{0,1\cdot 10^{-9}\cdot 1\cdot 10^{-2}}0,3\cdot 10^{-2}V = 3.000V$$

Όμοια για τον κάτω οπλισμό:

$$V_\Gamma - V_Y = \frac{Q_1}{C\ell}d_2 \to V_Y = -\frac{10^{-6}}{0,1\cdot 10^{-9}\cdot 1\cdot 10^{-2}}0,7\cdot 10^{-2}V = -7.000V$$

iii) Η δύναμη από το ηλεκτροστατικό πεδίο του πυκνωτή είναι συντηρητική, πράγμα που σημαίνει ότι το έργο της δεν εξαρτάται από τη διαδρομή, αλλά μόνο από την αρχική και τελική θέση. Έτσι έχουμε:

$$V_\Gamma - V_\Delta = \frac{W_{\Gamma\to\Delta}}{q} = \frac{W_{\Gamma\to Z} + W_{Z\to\Delta}}{q} = \frac{Eqy + Eq(Z\Delta)\sigma\upsilon\nu 90^o}{q} = Ey \to$$

$$V_\Delta = -\frac{Q_1}{C\ell}y = -\frac{10^{-6}}{0,1\cdot 10^{-9}\cdot 1\cdot 10^{-2}}0,5\cdot 10^{-2}V = -5.000V$$

Εξάλλου εφαρμόζοντας τη διατήρηση της ενέργειας, ανάμεσα στις θέσεις Α και Δ (και τα δύο πεδία είναι συντηρητικά) παίρνουμε:

$$K_A + U_A = K_\Delta + U_\Delta \to$$

$$K_\Delta = U_A - q\cdot V_\Delta = 0,9J - 1\cdot 10^{-6}\cdot(-5.000)J = 0,905J$$

iv) Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$a_A = \frac{F_c}{m} = k_c\frac{Qq}{mr_A^2}, \text{ ενώ } a_A = \frac{F_{o\mu}}{m} = \frac{Eq}{m} = \frac{Q_1 q}{mC\ell}$$

Συνεπώς για το λόγο τους έχουμε:

$$\frac{a_A}{a_\Delta} = \frac{k_c\frac{Qq}{mr_A^2}}{\frac{Q_1 q}{mC\ell}} = \frac{k_c C\ell}{r_A^2} = \frac{9\cdot 10^9\cdot 0,1\cdot 10^{-9}\cdot 1\cdot 10^{-2}}{10^{-4}} = 90$$

Σχόλια:

1) Στο i) ερώτημα εφαρμόσαμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση από το Α στο Β, ενώ στο iii) την αρχή διατή-

ρησης της ενέργειας. Θα μπορούσαμε να πράξουμε το αντίστροφο ή να χρησιμοποιήσουμε και στα δύο ερωτήματα την ίδια μέθοδο.

2) Στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο ισχύει η σχέση $E = \frac{V}{x}$ όπου V η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων μιας δυναμικής γραμμής και x η μεταξύ τους απόσταση. Έτσι θα μπορούσαμε να γράψουμε:

$$E = \frac{V_c}{\ell} = \frac{V_{X\Gamma}}{d_1} \rightarrow V_{X\Gamma} = \frac{V_c}{\ell} d_1$$

Απλά προτιμήθηκε η πλήρης απόδειξη, μέσω του έργου.

dmargaris@gmail.com