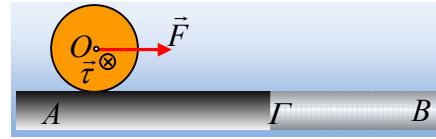


Μια ροπή και μια δύναμη επιταχύνουν.

Ένας τροχός μάζας M και ακτίνας $R=0,5\text{m}$ ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο A . Σε μια στιγμή δέχεται μέσω του άξονα μια σταθερή ροπή μέτρου $\tau=1,5\text{N}\cdot\text{m}$ και μια σταθερή οριζόντια δύναμη στον άξονά του $F=4\text{N}$, όπως στο σχήμα. Μετά από λίγο, αφού μετακινηθεί κατά $x=8\text{m}$, περνάει σε B επίπεδο, το οποίο παρουσιάζει με τον τροχό συντελεστή τριβής $\mu=0,2$, στη θέση Γ .



- i) Να υπολογιστεί η ενέργεια που μεταφέρεται στον τροχό μέσω της ασκούμενης ροπής, μέχρι τη θέση Γ .
- ii) Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του τροχού στη θέση Γ .
- iii) Αν η μάζα του τροχού είναι ίση με 4kg , για τη χρονική στιγμή ελάχιστα πριν περάσει ο τροχός στο B επίπεδο, να βρεθούν:
 - α) Η ισχύς της δύναμης F και ο ρυθμός μεταβολής της μεταφορικής κινητικής ενέργειας του τροχού.
 - β) Ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής.
 - γ) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του τροχού, ως προς τον άξονά του.
- iv) Για τη στιγμή, αμέσως μόλις περάσει ο τροχός στο B επίπεδο να υπολογιστούν:
 - α) Ο ρυθμός μεταβολής της μεταφορικής κινητικής ενέργειας του τροχού.
 - β) Ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής.
 - γ) Ο ρυθμός με τον οποίο μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της τριβής.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του $I= \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Η ενέργεια που μεταφέρεται στον τροχό μέσω του έργου της δύναμης, είναι ίση:

$$W_F = F \cdot x_{cm} = 4 \cdot 8\text{J} = 32\text{J}.$$

Αντίστοιχα η ενέργεια που μεταφέρεται μέσω της ασκούμενης ροπής είναι:

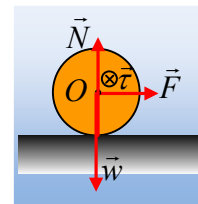
$$W_\tau = \tau \cdot \theta$$

Αλλά θεωρώντας την κίνηση σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική, ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα μας δίνει:

$$\Sigma F_x = m \cdot a_{cm} \rightarrow F = m \cdot a_{cm} \quad (1) \text{ και}$$

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \tau = \frac{1}{2} mR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

Αλλά τότε, η μεταφορική κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, για την οποία ισχύει $x = \frac{1}{2} a_{cm} \cdot t^2$, ενώ η περιστροφική κίνηση είναι στροφική ομαλά επιταχυνόμενη, όπου κατ' αντιστοιχία θα ισχύει $\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t^2$. Με διαίρεση των δύο αυτών



εξισώσεων κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (1) και (2), παίρνουμε:

$$\frac{x}{\vartheta} = \frac{a_{cm}}{a_{\gamma\omega\nu}} = \frac{\frac{F}{m}}{\frac{2\tau}{mR^2}} = \frac{FR^2}{2\tau} \rightarrow \vartheta = x \frac{2\tau}{FR^2} = 8 \frac{2 \cdot 1,5}{4 \cdot 0,5^2} \text{rad} = 24 \text{rad}$$

$$\text{Αλλά τότε } W_{\tau} = \tau \cdot \theta = 1,5 \cdot 24 \text{J} = 36 \text{J}.$$

ii) Εφαρμόζουμε για τον τροχό το Θ.Μ.Κ.Ε. για το διάστημα που κινείται στο Α επίπεδο:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_F + W_w + W_N + W_{\tau} \rightarrow$$

$$K_T = W_F + W_{\tau} = 32 \text{J} + 36 \text{J} = 68 \text{J}.$$

iii) Αν προσέξουμε τις εξισώσεις (1) και (2) θα δούμε ότι η μεταφορική κίνηση καθορίζεται αποκλειστικά από τη δύναμη F, ενώ η περιστροφική από τη ροπή τ. Αλλά τότε το έργο της δύναμης εμφανίζεται ως κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς, ενώ αντίστοιχα το έργο της ροπής, ως περιστροφική κινητική ενέργεια. Δηλαδή:

$$\frac{1}{2} m v_{cm}^2 = W_F \rightarrow v_{cm} = \sqrt{\frac{2W_F}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 32}{4}} \text{m/s} = 4 \text{m/s}$$

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = W_{\tau} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4W_{\tau}}{mR^2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 36}{4 \cdot 0,5^2}} \text{rad/s} = 12 \text{rad/s}$$

(προφανώς στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν εφαρμόζαμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για κάθε μια κίνηση χωριστά).

α) Με βάση τις παραπάνω τιμές:

$$P_F = F \cdot v_{cm} = 4 \cdot 4 \text{W} = 16 \text{W} \text{ και } \frac{dK_{\text{μετ}}}{dt} = \frac{dW_{F\text{ολ}}}{dt} = P_F = 16 \text{J/s}$$

$$\beta) \frac{dK_{\text{περ}}}{dt} = \frac{dW_{\tau}}{dt} = \tau \cdot \omega = 1,5 \cdot 12 \text{J/s} = 18 \text{J/s}$$

$$\gamma) \frac{dL_o}{dt} = \Sigma \tau = \tau = 1,5 \text{kgm}^2/\text{s}^2.$$

Κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα, ίδιας κατεύθυνσης με την ροπή.

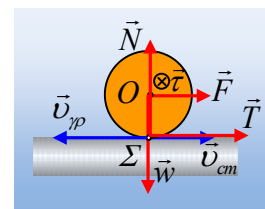
iv) Μόλις ο τροχός περάσει στο Β επίπεδο θα δεχτεί δύναμη τριβής.

Τι τριβή θα είναι αυτή και ποια η κατεύθυνσή της; Εστιάζουμε στο κατώτερο σημείο του τροχού Σ, σημείο με το οποίο έρχεται σε επαφή με το επίπεδο. Το σημείο Σ, έχει ταχύτητα ίση με v_{cm} ,

λόγω της μεταφορικής κίνησης και $v_{\gamma\pi} = \omega \cdot R$, εξαιτίας της κυκλικής του κίνησης γύρω από το κέντρο O. Αλλά τότε $v_{\Sigma} = v_{cm} - \omega R = 4 \text{m/s} - 12 \cdot 0,5 \text{m/s} = -2 \text{m/s}$,

δηλαδή το σημείο Σ έχει ταχύτητα προς τα αριστερά, οπότε ο τροχός θα δεχτεί δύναμη τριβής ολίσθησης με φορά προς τα δεξιά, όπως στο διπλανό σχήμα, μέτρου:

$$T = \mu N = \mu mg = 0,2 \cdot 4 \cdot 10 \text{N} = 8 \text{N}$$



α) Με βάση τις παραπάνω τιμές:

$$\frac{dK_{\mu\epsilon\tau}}{dt} = \frac{dW_{Fολ}}{dt} = \frac{(F+T) \cdot dx}{dt} = (F+T) \cdot v_{cm} \rightarrow$$

$$\frac{dK_{\mu\epsilon\tau}}{dt} = (F+T) \cdot v_{cm} = (4+8) \cdot 4J/s = 48J/s.$$

$$\beta) \quad \frac{dK_{\pi\epsilon\rho}}{dt} = \frac{dW_{\Sigma\tau}}{dt} = \tau \cdot \omega - TR \cdot \omega = 1,5 \cdot 12J/s - 8 \cdot 0,5 \cdot 12J/s = -30J/s$$

όπου η ισχύς της ροπής της τριβής είναι αρνητική, αφού θεωρώντας θετική τη δεξιόστροφη ροπή τ , η ροπή της τριβής είναι αρνητική, επιβραδύνοντας την περιστροφική κίνηση του τροχού. Έτσι τη στιγμή αυτή η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής μειώνεται κατά 30J/s.

γ) Η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της **ολίσθησης** του τροχού και ο αντίστοιχος ρυθμός είναι ίσος με την ισχύ της τριβής, κατά απόλυτο τιμή.

$$P_T = \frac{dW_T}{dt} = \frac{T \cdot dx \cdot \sigma\upsilon\nu 180^\circ}{dt} = -T \cdot v_{\Sigma} = -8 \cdot 2W = -16W$$

$$\text{Οπότε } \frac{dQ_s}{dt} = |P_T| = 16J/s$$

Σχόλιο:

Τι ακριβώς συμβαίνει μόλις ο τροχός μπει στο Β επίπεδο;

Η δύναμη F παρέχει ενέργεια στον τροχό με ρυθμό 16J/s, αλλά η μεταφορική κινητική του ενέργεια αυξάνεται κατά 48J/s. Γιατί; Γιατί και η τριβή αυξάνει τη μεταφορική κινητική ενέργεια, κατά $T \cdot v_{cm} = 8 \cdot 4J/s = 32J/s$.

Πού βρήκε η τριβή την παραπάνω ενέργεια; Ας έρθουμε στην περιστροφική κίνηση του τροχού. Η ροπή τ προσφέρει ενέργεια με ρυθμό 18J/s, αλλά η ροπή της τριβής αφαιρεί ενέργεια με ρυθμό $\tau_T \cdot \omega = T \cdot R \cdot \omega = 8 \cdot 0,5 \cdot 12J/s = 48J$. Το αποτέλεσμα βέβαια είναι να μειώνεται η περιστροφική κινητική ενέργεια κατά (48J-18J=30J). Από τα 48J/s που αφαιρεί η τριβή, τα 32J/s τα μετατρέπει σε μεταφορική κινητική ενέργεια και τα υπόλοιπα 16J/s μετατρέπονται σε θερμική ενέργεια.

dmargaris@gmail.com