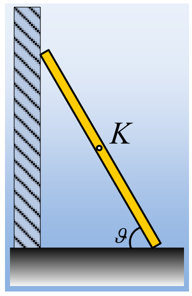
Περισσότεροι κινηματικοί περιορισμοί.

Αποκλειστικά και μόνο για Καθηγητές.

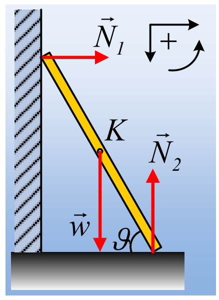


Αφήνουμε μια σκάλα ύψους 2m σε επαφή με λείο κατακόρυφο τοίχο και σε τέτοια θέση, ώστε να σχηματίζει με το έδαφος γωνία θ, όπου ημθ=0,8. Η σκάλα αρχίζει να γλιστρά, αφού και το έδαφος είναι επίσης λείο.

Να βρεθεί η αρχική επιτάχυνση του μέσου Κ της σκάλας και η αρχική γωνιακή επιτάχυνση της σκάλας, στην παραπάνω θέση.

Θεωρείστε τη σκάλα σαν μια ομογενή δοκό, για την οποία η ροπή αδράνειας, ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της, δίνεται από τη σχέση $I = Ml^2/12$, ενώ $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



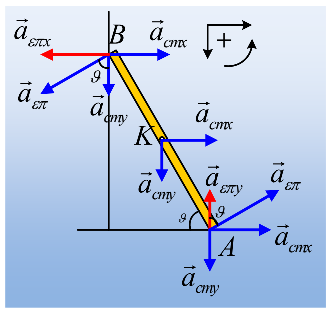
Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σκάλα. Θεωρούμε την κίνηση της σκάλας σύνθετη, μια μεταφορική και μια περιστροφή γύρω από άξονα, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας της Κ. Τότε με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = m\alpha_{cmx} \rightarrow N_1 = m\alpha_{cmx} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = m\alpha_{cmy} \rightarrow mg - N_2 = m\alpha_{cmy} \quad (2)$$

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$N_2 \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - N_1 \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \eta\mu\theta = \frac{1}{12} m\ell^2 a_{\gamma\omega\nu}. \quad (3)$$



Ας έρθουμε τώρα στο κάτω άκρο Α της σκάλας. Αυτό έχει τις επιταχύνσεις α_{cmx} και α_{cmy}, αλλά επιπλέον την επιτρόχια επιτάχυνση:

$$\alpha_{\varepsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{\ell}{2}.$$

Αναλύουμε την επιτρόχια επιτάχυνση σε μια κατακόρυφη συνιστώσα:

$$\alpha_{\varepsilon\pi y} = a_{\varepsilon\pi} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \alpha_{\gamma\omega\nu} \frac{\ell}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

και μια οριζόντια $\alpha_{\varepsilon\pi x} = \alpha_{\varepsilon\pi} \cdot \eta\mu\theta$, (η έχει οποία δεν έχει σχεδιαστεί στο σχήμα, αφού δεν μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός της).

Αλλά το άκρο Α θα κινηθεί οριζόντια, οπότε η επιτάχυνση στην κατακόρυφη διεύθυνση είναι μηδενική:

$$a_{cmy} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \frac{\ell}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \quad (4)$$

Ερχόμαστε τώρα στο πάνω άκρο Β. Με την ίδια λογική, το σημείο Β δεν έχει οριζόντια επιτάχυνση, συνεπώς:

$$a_{cmx} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \frac{\ell}{2} \cdot \eta\mu\theta \quad (5)$$

Οι εξισώσεις (1), (2), (3), (4) και (5) αποτελούν ένα σύστημα, η λύση του οποίου θα μας δώσει τα ζητούμενα. Έτσι με αντικατάσταση στην (3) παίρνουμε:

$$\left(mg - ma_{cmy}\right)\cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - ma_{cmx} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \eta\mu\theta = \frac{1}{12} m\ell^2 a_{\gamma\omega\nu} . \rightarrow$$

$$g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - \alpha_{\gamma\omega\nu} \frac{\ell}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta - \alpha_{\gamma\omega\nu} \frac{\ell}{2} \cdot \eta\mu^2\theta = \frac{1}{6} \ell a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{6g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{\ell + 3\ell(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta)} = \frac{3g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{2\ell}$$

Και με αντικατάσταση:

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{2\ell} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 0{,}6}{2 \cdot 2} rad/s^2 = 4{,}5 rad/s^2$$

Αλλά τότε από την (4):

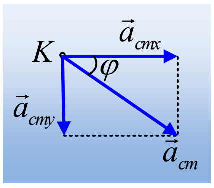
$$a_{cmy} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \frac{\ell}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 4{,}5 \cdot 1 \cdot 0{,}6 m/s^2 = 2{,}7 m/s^2$$

Και από την (5):

$$a_{cmx} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \frac{\ell}{2} \cdot \eta\mu\theta = 4{,}5 \cdot 1 \cdot 0{,}8 m/s^2 = 3{,}6 m/s^2$$

Οπότε $a_{cm} = \sqrt{a_{cmx}^2 + a_{cmy}^2} = \sqrt{2{,}7^2 + 3{,}6^2} m/s^2 = 4{,}5 m/s^2$

Ενώ $\varepsilon\phi\varphi = \frac{a_{cmy}}{a_{cmx}} = \frac{2{,}7}{3{,}6} = \frac{3}{4}$



dmargaris@gmail.com