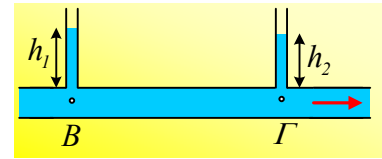


### Μια στρωτή ροή.

Σε ένα οριζόντιο σωλήνα σταθερής διατομής  $100\text{cm}^2$  έχουμε μια στρωτή ροή νερού. Σε δύο σημεία Β και Γ, τα οποία απέχουν οριζόντια απόσταση  $x=4\text{m}$ , συνδέονται δυο λεπτοί κατακόρυφοι σωλήνες, στους οποίους το νερό ανέρχεται σε ύψη  $h_1=40\text{cm}$  και  $h_2=39,6\text{cm}$  αντίστοιχα, όπως στο διπλανό σχήμα. Κάποια στιγμή, την οποία θεωρούμε  $t=0$ , η παροχή του σωλήνα, είναι  $\Pi_0=0,2\text{L/s}$ .



- i) Να βρεθούν οι ταχύτητες ροής στα σημεία Β και Γ τη στιγμή  $t=0$ .
- ii) Να υπολογιστούν οι τιμές της πίεσης στα σημεία Β και Γ, καθώς και η διαφορά πίεσης μεταξύ τους.
- iii) Να βρεθεί η επιτάχυνση της ποσότητας του νερού, μεταξύ των σημείων Β και Γ.
- iv) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του νερού στο σημείο Β τη στιγμή  $t_1=10\text{s}$ , καθώς και ο όγκος του νερού που εξέρχεται από το δεξιό άκρο του σωλήνα μέχρι τη στιγμή  $t_1$ , θεωρώντας σταθερά τα ύψη του νερού στους δύο κατακόρυφους σωλήνες.

Το νερό να θεωρηθεί **ιδανικό ασυμπίεστο ρευστό** το οποίο δεν εμφανίζει εσωτερική τριβή ή τριβή με τα τοιχώματα του σωλήνα. Δίνονται επίσης η ατμοσφαιρική πίεση  $p_{at}=10^5\text{N/m}^2$ , η πυκνότητα του νερού  $\rho=1.000\text{kg/m}^3$  και  $g=10\text{m/s}^2$ .

#### Απάντηση.

- i) Από την εξίσωση της συνέχειας για τα σημεία Β και Γ έχουμε ότι  $A_1v_1=A_2v_2$ . Αλλά αφού ο σωλήνας έχει σταθερή διατομή  $A_1=A_2$ , τότε και  $v_1=v_2$ . Δηλαδή η ταχύτητα ροής είναι σταθερή σε όλα τα σημεία του σωλήνα του σχήματος. Αλλά τότε:

$$\Pi_0 = A \cdot v_0 \rightarrow v_0 = \frac{\Pi_0}{A} = \frac{0,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}}{100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} \text{ m/s} = 0,02 \text{ m/s}$$

- ii) Για τις πιέσεις στα σημεία Β και Γ έχουμε:

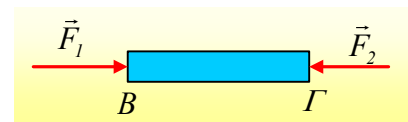
$$p_B = p_{at} + \rho g h_1 = 10^5 \text{ N/m}^2 + 10^3 \cdot 10 \cdot 0,4 \text{ N/m}^2 = 104.000 \text{ N/m}^2 = 1,040 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$p_G = p_{at} + \rho g h_2 = 10^5 \text{ N/m}^2 + 10^3 \cdot 10 \cdot 0,396 \text{ N/m}^2 = 103.960 \text{ N/m}^2 = 1,0396 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

Οπότε η διαφορά πίεσης μεταξύ των σημείων Β και Γ είναι:

$$p_B - p_G = 40 \text{ N/m}^2$$

- iii) Ας πάρουμε την ποσότητα του νερού μεταξύ των σημείων Β και Γ, σχήματος κυλίνδρου με βάσεις εμβαδού Α. Η μάζα αυτή του νερού, δέχεται δυνάμεις από το υπόλοιπο νερό, όπως στο διπλανό σχήμα, όπου  $F_1=p_B \cdot A$  και  $F_2=p_G \cdot A$ . Αλλά τότε από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, για την ποσότητα αυτή, μάζας  $m=\rho V=\rho Ax$ , θα έχουμε:



$$\Sigma F = ma \rightarrow a = \frac{F_1 - F_2}{m} = \frac{(p_B - p_G)A}{\rho(Ax)} = \frac{p_B - p_G}{\rho x}$$

$$a = \frac{p_B - p_\Gamma}{\rho x} = \frac{40}{1.000 \cdot 4} m/s^2 = 0,01 m/s^2.$$

iv) Παρατηρούμε ότι το νερό της στήλης μεταξύ Β και Γ, έχει σταθερή επιτάχυνση. Αλλά τότε και κάθε σωματίδιο ρευστού έχει την ίδια αυτή επιτάχυνση, οπότε τη στιγμή  $t_1=10s$ , θα έχει αποκτήσει ταχύτητα:

$$v_1 = v_0 + at_1 = 0,02 m/s + 0,01 \cdot 10 m/s = 0,12 m/s.$$

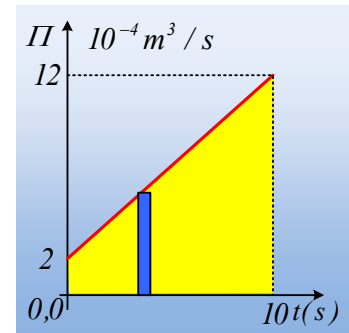
Οπότε η παροχή του σωλήνα στο παραπάνω χρονικό διάστημα από 0-10s, δεν είναι σταθερή, αλλά δίνεται από την σχέση:

$$\Pi = A \cdot v = A(v_0 + at) = 10^{-2}(0,02 + 0,01t) = 2 \cdot 10^{-4} + 1 \cdot 10^{-4} t \quad (\text{S.I.})$$

Εξάλλου η παροχή δίνεται από την εξίσωση:

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} \rightarrow \Delta V = \Pi \cdot \Delta t,$$

οπότε κάνοντας το διάγραμμα  $\Pi-t$ , το μπλε εμβαδόν για το χρονικό διάστημα  $\Delta t$ , είναι αριθμητικά ίσο με τον όγκο του νερού που εξέρχεται από το σωλήνα, σε αυτό το χρονικό διάστημα. Χωρίζοντας όμως το χρονικό διάστημα των 10s, σε πολύ μικρά  $\Delta t$ , το άθροισμα των εμβαδών, θα μας δώσει το εμβαδόν του σχηματιζόμενου τραπεζιού, το οποίο θα είναι αριθμητικά ίσο με τον συνολικό όγκο του νερού.



$$V_{ολ} = \frac{(2 + 12) \cdot 10^{-4} m^3/s}{2} 10s = 7 \cdot 10^{-3} m^3 = 7L$$

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)