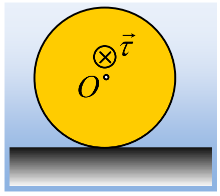
Όταν η τριβή επιταχύνει έναν τροχό.



Ένας τροχός μάζας M=10kg και ακτίνας R=0,4m ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής μ_s=μ=0,2. Σε μια στιγμή t_0=0, δέχεται μέσω κατάλληλου μηχανισμού μια σταθερή ροπή, μέτρου τ=16Nm, όπως στο σχήμα.

i) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του άξονα του τροχού και η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.

ii) Η ταχύτητα υ_{cm} του άξονα Ο του τροχού και η γωνιακή του ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_1=4s.

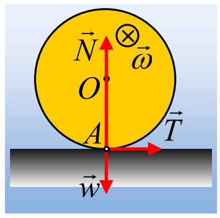
iii) Πόση ενέργεια μεταφέρεται στον τροχό μέσω της ασκούμενης ροπής;

iv) Να υπολογιστεί η μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της τριβής, στο παραπάνω χρονικό διάστημα;

v) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της ροπής την οποία θα μπορούσαμε να ασκήσουμε στον τροχό για να μην παρατηρηθεί ολίσθηση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του I= ½ MR^2 και g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Μόλις ασκηθεί στον τροχό η ροπή τ, το σημείο επαφής του με το έδαφος, σημείο Α, τείνει να αποκτήσει ταχύτητα προς τα αριστερά, οπότε εμφανίζεται τριβή, προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα.

Θεωρούμε την κίνηση του τροχού σύνθετη, αποτελούμενη από μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από τον άξονά του Ο και εφαρμόζουμε το 2^o νόμο του Νεύτωνα για τις επιμέρους κινήσεις:

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x=M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow T=M\cdot\alpha_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \tau-T\cdot R=\frac{1}{2}MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)

Το ερώτημα είναι τι τριβή είναι αυτή; Είναι στατική ή τριβή ολίσθησης;

Υποθέτουμε ότι ο τροχός κυλίεται (συνεπώς δεν υπάρχει ολίσθηση και η τριβή είναι στατική) οπότε $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ και από τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε:

$$\tau-MR\cdot\alpha_{cm}=\frac{1}{2}MR\cdot\alpha_{cm} \rightarrow$$

$$a_{cm}=\frac{2\tau}{3MR}=\frac{2\cdot 16}{3\cdot 10\cdot 0,4}m/s^2=\frac{8}{3}m/s^2.$$

$$\text{Αλλά τότε:}\quad T=M\cdot\alpha_{cm}=\frac{80}{3}N$$

Η μέγιστη όμως δυνατή τιμή της στατικής τριβής, η οριακή τριβή, έχει μέτρο:

$$T_{s,max}=\mu_s\cdot N=\mu_s\cdot Mg=0,2\cdot 10\cdot 10N=20N$$

Συνεπώς δεν μπορεί να αναπτυχθεί στατική τριβή μέτρου 80/3N και ο τροχός θα ολισθήσει και η υπόθεσή μας οδηγήθηκε σε άτοπο. Αλλά τότε η ασκούμενη τριβή είναι τριβή ολίσθησης μέτρου T=20N και από τις εξισώσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$T=M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow a_{cm}=\frac{T}{M}=\frac{20N}{10kg}=2m/s^2.$$

$$\tau\text{-}T\cdot R=\tfrac{1}{2}MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu}=\frac{2(\tau-TR)}{MR^2}=\frac{2(16-20\cdot 0{,}4)}{10\cdot 0{,}4^2}rad/s^2=10rad/s^2.$$

ii) Με βάση τα παραπάνω η μεταφορική κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη για την οποία:

$$\upsilon_{cm}=\alpha_{cm}\cdot t=2\cdot 4m/s=8m/s \;\;\; \kappa\alpha\iota\; x=\tfrac{1}{2}\,\alpha_{cm}\cdot t^2=\tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 4^2m=16m$$

Εξάλλου η περιστροφική κίνηση είναι επίσης ομαλά επιταχυνόμενη, όπου κατ' αντιστοιχία παίρνουμε:

$$\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t=10\cdot 4rad/s=40rad/s \;\;\; \kappa\alpha\iota\; \theta=\tfrac{1}{2}\,\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t^2=\tfrac{1}{2}\,10\cdot 4^2rad=80rad.$$

iii) Η ενέργεια που μεταφέρεται στον τροχό μέσω της ασκούμενης ροπής, είναι ίση με το έργο της ροπής:

$$W_\tau=\tau\cdot\theta=16\cdot 80J=1.280J.$$

iv) Τη στιγμή t_1=4s, ο τροχός έχει κινητική ενέργεια:

$$K=\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\cdot\omega^2 \rightarrow$$

$$K=\frac{1}{2}10\cdot 8^2J+\frac{1}{2}\frac{1}{2}10\cdot 0{,}4^2\cdot 40^2J=320J+640J=960J$$

Αλλά τότε από τη διατήρηση της ενέργειας, αφού δόθηκε ενέργεια μέσω της ροπής 1.280J και ο τροχός έχει κινητική ενέργεια μόνο 960J, το υπόλοιπο, μετετράπη σε θερμική:

$$Q=W_\tau\text{-}K=320J.$$

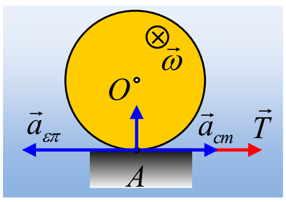
v) Η μέγιστη δυνατή τιμή της ροπής, είναι αυτή που θα επέτρεπε στον τροχό να κυλίεται με τη μέγιστη δυνατή στατική τριβή T_s=20N. Αλλά τότε και πάλι $\alpha_{cm}=2m/s^2$, ενώ πρέπει να ισχύει $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$, οπότε από την σχέση (2) παίρνουμε:

$$\tau\text{-}T\cdot R=\tfrac{1}{2}\,MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \tau_{max}=T\cdot R+\tfrac{1}{2}\,MR\cdot\alpha_{cm}=20\cdot 0{,}4Nm+\tfrac{1}{2}\,10\cdot 0{,}4\cdot 2Nm=12Nm.$$

Σχόλια:

1) Μπορούμε να βρούμε τη μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική υπολογίζοντας το έργο της ασκούμενης τριβής ολίσθησης:

$$Q=|W_T|=|T|\cdot|\Delta x|$$



Όπου |Δx| το μέτρο της μετατόπισης του σημείου εφαρμογής της τριβής.

Αλλά το σημείο Α έχει μια συνιστώσα επιτάχυνσης α_{cm} εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης του τροχού και μια $\alpha_{\varepsilon\pi}=\alpha_{\gamma\omega\nu}R$ εξαιτίας της κυκλικής κίνησής του γύρω από το Ο (έχει και κεντρομόλο επιτάχυνση, η οποία δεν μας απασχολεί εδώ). Έτσι έχουμε:

$$\alpha_A=\alpha_{cm}\text{-}\alpha_{\gamma\omega\nu}R=2m/s^2\text{-}10\cdot 0{,}4m/s^2=-2\;m/s^2.$$

Το σημείο Α δηλαδή, έχει επιτάχυνση με φορά προς τα αριστερά, οπότε και σε χρονικό διάστημα 4s θα έχει μετατοπισθεί οριζόντια κατά $\Delta x=\tfrac{1}{2}\,\alpha_A\cdot t^2=\tfrac{1}{2}\,(-2)\cdot 4^2m=-16m$. Αλλά τότε το έργο της τριβής είναι:

$$W_T=|T|\cdot|\Delta x|\cdot\text{συν}180°= -\ 20N\cdot 16m= -320J$$

Οπότε και $Q=|W_T|= 320J$.

2) Θα μπορούσαμε να υπολογίζουμε το συνολικό έργο της τριβής, μιλώντας για τις επιμέρους κινήσεις:
Μεταφορική κίνηση, έργο δύναμης:

$$W_T=+T\cdot x_{cm}= +20\cdot 16J=320J.$$

Στροφική κίνηση, έργο ροπής:

$$W_{\tau/T}= -\ \tau_T\cdot\theta= -\ TR\cdot\theta= -\ 20\cdot 0{,}4\cdot 80J = -640J$$

Τι σημαίνουν τα παραπάνω έργα; Η τριβή, μέσω του έργου της ροπής της, αφαιρεί ενέργεια 640J από τον τροχό από τα οποία μετατρέπει σε μεταφορική κινητική ενέργειας, μέσω του έργου της, τα 320J, οπότε τα υπόλοιπα 320J αφαιρούνται από τον τροχό και μετατρέπονται σε θερμική ενέργεια.

dmargaris@gmail.com