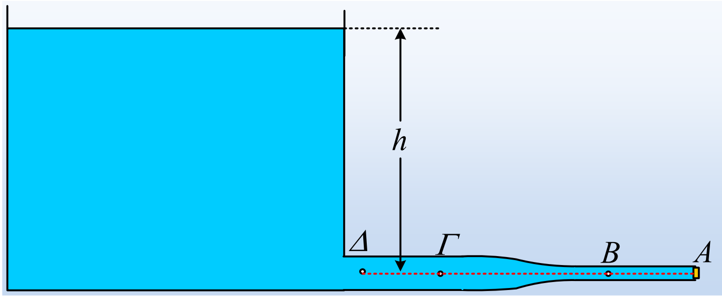
Οι πιέσεις και μια μόνιμη ροή.



Κοντά στον πυθμένα μιας μεγάλης δεξαμενής, συνδέεται ένας χονδρός οριζόντιος σωλήνας διατομής A_1, ο οποίος καταλήγει σε δεύτερο διατομής $A_2= ¼ A_1$. Το άκρο του δεύτερου σωλήνα κλείνεται με μια τάπα. Τα σημεία Α, Β, Γ και Δ απέχουν κατακόρυφη απόσταση h από την ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής, τέτοια ώστε να ισχύει $p_{ατμ}=5ρgh$.

i) Σε ποιο από τα σημεία που έχουν σημειωθεί στο σχήμα, έχουμε μεγαλύτερη πίεση;

ii) Η πίεση στο σημείο Δ είναι:

α) $p_Δ=4ρgh$, β) $p_Δ=5ρgh$, γ) $p_Δ=6ρgh$

Σε μια στιγμή, βγάζουμε την τάπα, οπότε σε ελάχιστο χρόνο αποκαθίσταται μια μόνιμη και στρωτή ροή. Θεωρώντας πολύ μεγάλη την επιφάνεια της δεξαμενής, σε σύγκριση με τις διατομές των σωλήνων, ενώ το νερό ιδανικό ασυμπίεστο ρευστό, το οποίο ρέει χωρίς τριβές:

iii) Η πίεση στο σημείο Β έχει τιμή:

α) $p_B=0$, β) $p_B=4ρgh$, γ) $p_B=5ρgh$, δ) $p_B=6ρgh$

iv) Για την πίεση στο σημείο Δ ισχύει:

α) $p_Δ<5ρgh$, β) $5ρgh< p_Δ <6ρgh$, γ) $p_Δ>6ρgh$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση.

i) Με κλειστή την τάπα, έχουμε ένα υγρό σε υδροστατική ισορροπία, όπου τα σημεία Α, Β, Γ και Δ βρίσκονται στο ίδιο βάθος h, σε σχέση με την ελεύθερη επιφάνεια του νερού, οπότε σε όλα τα σημεία η πίεση έχει την ίδια τιμή.

ii) Η πίεση στο σημείο Δ με βάση την αρχή του Pascal είναι ίση:

$$p_Δ = p_{ατμ} + ρgh = 5ρgh + ρgh = 6ρgh$$

Σωστό το γ).

iii) Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων Α και Β παίρνουμε:

$$p_B + \frac{1}{2}ρυ_B^2 = p_A + \frac{1}{2}ρυ_A^2 \quad (1)$$

Αλλά από την εξίσωση της συνέχειας για τις διατομές του λεπτού σωλήνα, στις θέσεις Α και Β, έχουμε:

$$A_B \cdot \upsilon_B = A_A \cdot \upsilon_A \ \rightarrow \upsilon_B = \upsilon_A$$

Έτσι η (1) γίνεται $p_B = p_A = p_{ατμ} = 5\rho g h$. Σωστό το γ).

iv) Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων Α και Δ παίρνουμε:

$$p_\Delta + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Delta^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 \quad (2)$$

Αλλά από την εξίσωση της συνέχειας για τις διατομές στα σημεία Α και Δ παίρνουμε:

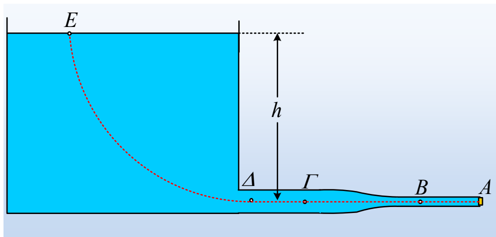
$$A_\Delta \cdot \upsilon_\Delta = A_A \cdot \upsilon_A \ \rightarrow 4A_1 \cdot \upsilon_\Delta = A_1 \cdot \upsilon_A \rightarrow 4\upsilon_\Delta = \upsilon_A$$

Και η (2) γίνεται:

$$p_\Delta + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\upsilon_A}{4}\right)^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 \rightarrow$$

$$p_\Delta = p_A + \frac{15}{16}\cdot\frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 \quad (3)$$

Παίρνοντας τώρα την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων Α και ενός σημείου Ε στην επιφάνεια της δεξαμενής, κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής παίρνουμε:



$$p_E + \frac{1}{2}\rho\upsilon_E^2 + \rho g h = p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2$$

Αλλά η ταχύτητα στο σημείο Ε είναι σχεδόν μηδενική, αφού το εμβαδόν της επιφάνειας είναι πολύ μεγαλύτερο του εμβαδού στο άκρο Α του σωλήνα, οπότε:

$$\upsilon_A = \sqrt{2gh} \quad \text{(θεώρημα } \textbf{Torricelli}\text{)}$$

Και με αντικατάσταση στην (3):

$$p_\Delta = p_A + \frac{15}{16}\cdot\frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 = 5\rho g h + \frac{15}{32}\rho\left(\sqrt{2gh}\right)^2 = 5\rho g h + \frac{15}{16}\rho g h < 6\rho g h$$

Σωστή η β) πρόταση 5ρgh< p_Δ <6ρgh.

dmargaris@gmail.com