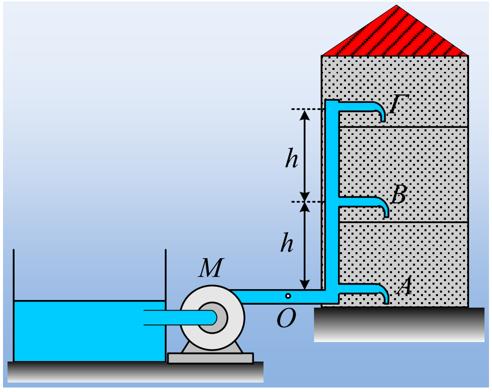
# Τρεις ανοικτές βρύσες και η αντλία.




Μια τριώροφη κατοικία τροφοδοτείται με νερό από μια δεξαμενή, στην επιφάνεια του εδάφους, με την βοήθεια μιας αντλίας (Μ), όπως στο σχήμα. Ο κεντρικός σωλήνας τροφοδοσίας έχει ορισμένη διατομή $Α_1$, ενώ με πλήρως ανοικτές τις βρύσες, το νερό εξέρχεται σχηματίζοντας φλέβες με διατομές $Α=0{,}3cm^2$. Η βρύση στο ισόγειο, βρίσκεται στο ίδιο ύψος με την αντλία, ενώ κάθε όροφος έχει ύψος h=4m. Η αντλία λειτουργεί αυτόματα, εξασφαλίζοντας στην έξοδό της, σταθερή πίεση $p_o=2\cdot 10^5 N/m^2$ . Ανοίγουμε ταυτόχρονα και πλήρως τις τρεις βρύσες, οπότε η παροχή της βρύσης του ισογείου είναι 0,45L/s. Θεωρώντας μηδενικό το συντελεστή ιξώδους, ενώ δεν υπάρχουν τριβές του νερού με τα τοιχώματα και τις ροές μόνιμες και στρωτές:

i) Να βρεθούν οι παροχές στους δύο ορόφους.

ii) Ποια η ισχύς τη αντλίας;

iii) Βέβαια στην πραγματικότητα, η παραπάνω ροή δεν είναι στρωτή αλλά τυρβώδης, αφού το νερό δεν έχει μηδενικό συντελεστή ιξώδους. Έτσι λειτουργώντας η αντλία με την παραπάνω ισχύ, οι τρεις παροχές είναι $Π_Α=0{,}42L/s$, $Π_Β=0{,}3L/s$ και $Π_Γ=0{,}18L/s$. Να βρεθεί η ισχύς που μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της εσωτερικής τριβής που εμφανίζεται.

Δίνεται ατμοσφαιρική πίεση $p_{ατ}=10^5N/m^2$ η πυκνότητα του νερού $ρ=1.000kg/m^3$ και $g=10m/s^2$.

## *Απάντηση:*

i) Έστω $υ_1$, $υ_2$ και $υ_3$ οι ταχύτητες εκροής στις τρεις βρύσες και υ η ταχύτητα του νερού στην έξοδο της αντλίας, σημείο Ο.

Για την βρύση Α:

$$Π_1=Α\cdot υ_1 \rightarrow υ_1 = \frac{0{,}45\cdot 10^{-3}m^3/s}{0{,}3\cdot 10^{-4}m^2} = 15m/s$$

Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου Ο και του σημείου εξόδου της βρύσης Α στο ισόγειο:

$$p_o + \frac{1}{2}ρυ^2 = p_A + \frac{1}{2}ρυ_1^2 \rightarrow$$

$$υ = \sqrt{\frac{2(p_A - p_o)}{ρ} + υ_1^2} = \sqrt{\frac{2\cdot(1-2)10^5}{10^3} + 15^2}\,m/s = \sqrt{25}m/s = 5m/s$$

- Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου Ο και του σημείου εξόδου της βρύσης Β:

$$p_o + \frac{1}{2}ρυ^2 = p_B + \frac{1}{2}ρυ_2^2 + ρgh \rightarrow$$

$$\upsilon_2=\sqrt{\frac{2(p_o-p_B)}{\rho}+\upsilon^2-2gh}=\sqrt{\frac{2\cdot(2-1)10^5}{10^3}+5^2-2\cdot 10\cdot 4}m/s=\sqrt{145}m/s\approx 12m/s$$

Αλλά τότε η παροχή της βρύσης του α΄ ορόφου είναι:

$$\Pi_2=A\cdot\upsilon_2=0,3\cdot 10^{-4}\cdot 12m^3/s=0,36L/s.$$

- Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου Ο και του σημείου εξόδου της βρύσης Γ:

$$p_o+\frac{1}{2}\rho\upsilon^2=p_\Gamma+\frac{1}{2}\rho\upsilon_3^2+2\rho gh\ \rightarrow$$

$$\upsilon_3=\sqrt{\frac{2(p_o-p_\Gamma)}{\rho}+\upsilon^2-4gh}=\sqrt{\frac{2\cdot(2-1)10^5}{10^3}+5^2-4\cdot 10\cdot 4}m/s=\sqrt{65}m/s\approx 8m/s$$

Οπότε η παροχή της βρύσης του β΄ ορόφου είναι:

$$\Pi_3=A\cdot\upsilon_3=0,3\cdot 10^{-4}\cdot 8m^3/s=0,24L/s.$$

ii) Υπεύθυνη για την αύξηση της μηχανικής ενέργειας του νερού, κατά την μεταφορά του από την δεξαμενή, στις τρεις βρύσες, είναι η αντλία. Αλλά ο ρυθμός αύξησης της μηχανικής ενέργειας του νερού κατά την παραπάνω μεταφορά είναι:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t}+\frac{\Delta K}{\Delta t}=\frac{\Delta m\cdot gh}{\Delta t}+\frac{\frac{1}{2}\Delta m\cdot\upsilon^2}{\Delta t}=\frac{\rho\Delta V\cdot gh}{\Delta t}+\frac{\frac{1}{2}\rho\Delta V\cdot\upsilon^2}{\Delta t}\rightarrow$$

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta t}=\frac{\Delta U}{\Delta t}+\frac{\Delta K}{\Delta t}=\Pi\left(\rho gh+\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon^2\right)\rightarrow$$

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta t}=\Pi_1\left(\rho gh+\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_1^2\right)=0,45\cdot 10^{-3}\left(0+\frac{1}{2}1.000\cdot 15^2\right)J/s\approx 50,6J/s$$

$$\frac{\Delta E_2}{\Delta t}=\Pi_2\left(\rho gh+\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_1^2\right)=0,36\cdot 10^{-3}\left(10.000\cdot 4+\frac{1}{2}1.000\cdot 12^2\right)J/s\approx 40,3J/s$$

$$\frac{\Delta E_3}{\Delta t}=\Pi_3\left(2\rho gh+\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_1^2\right)=0,24\cdot 10^{-3}\left(10.000\cdot 8+\frac{1}{2}1.000\cdot 8^2\right)J/s\approx 26,9J/s$$

Αλλά τότε:

$$\frac{\Delta E_{o\lambda}}{\Delta t}=(50,6+40,3+26,9)J/s\approx 117,8J/s=P_{\alpha\nu\tau\lambda\acute{\iota}\alpha\varsigma}$$

iii) Το νερό που εξέρχεται στη μονάδα του χρόνου, από την Α βρύση, αφού η ροή είναι τυρβώδης, δεν είναι σταθερή. Μπορούμε όμως να βρούμε την μέση ταχύτητα εκροής:

$$\upsilon_1'=\frac{\Pi_1'}{A}=\frac{0,42\cdot 10^{-3}m^3/s}{0,3\cdot 10^{-4}m^2}=14m/s$$

Αποτέλεσμα της μεταφοράς είναι να αυξάνεται η μηχανική ενέργεια του νερού και ο ρυθμός αύξησης θα είναι:

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta t} = \frac{\Delta U}{\Delta t} + \frac{\Delta K}{\Delta t} = \Pi_1\left(\rho g h + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_1'^2\right) = 0{,}42 \cdot 10^{-3}\left(\frac{1}{2}1.000 \cdot 14^2\right)J/s \approx 41{,}2J/s$$

Με την ίδια λογική, από την βρύση Β:

$$\upsilon_2' = \frac{\Pi_2'}{A} = \frac{0{,}3 \cdot 10^{-3} m^3/s}{0{,}3 \cdot 10^{-4} m^2} = 10m/s$$

$$\frac{\Delta E_2}{\Delta t} = \Pi_2\left(\rho g h + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_2^2\right) = 0{,}3 \cdot 10^{-3}\left(1.000 \cdot 10 \cdot 4 + \frac{1}{2}1.000 \cdot 10^2\right)J/s = 27J/s$$

Ενώ από την βρύση Γ:

$$\upsilon_3' = \frac{\Pi_3'}{A} = \frac{0{,}18 \cdot 10^{-3} m^3/s}{0{,}3 \cdot 10^{-4} m^2} = 6m/s$$

$$\frac{\Delta E_3}{\Delta t} = \Pi_3\left(2\rho g h + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_3'^2\right) = 0{,}18 \cdot 10^{-3}\left(2 \cdot 1.000 \cdot 10 \cdot 4 + \frac{1}{2}1.000 \cdot 6^2\right)J/s = 17{,}6J/s$$

Συνεπώς η συνολική αύξηση της μηχανικής ενέργειας της ποσότητας του νερού που εξέρχεται από τις τρεις βρύσες, στη μονάδα του χρόνου, είναι ίση με $(41{,}2 + 27 + 17{,}6)J/s = 85{,}8J/s$ ενώ η αντίστοιχη ενέργεια που πήρε από την αντλία είναι 117,8J/s. Αλλά τότε με βάση της διατήρηση της ενέργειας, ανά μονάδα χρόνου η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική (αυξάνοντας την εσωτερική ενέργεια του νερού και των σωλήνων) εξαιτίας των τριβών είναι:

$$P_Q = (117{,}8J - 85{,}8)J/s = 32J/s$$

**dmargaris@gmail.com**