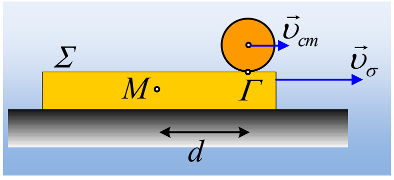
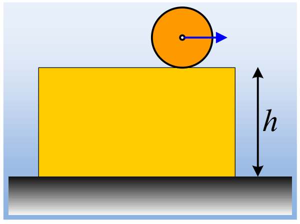
Μια ακόμη πιο …δύσκολη συνέχεια.

Μόνο για καθηγητές.

Σαν συνέχεια της ανάρτησης «[Μια …δύσκολη περίπτωση, σαν φύλλο εργασίας.]» ας δούμε μερικά ακόμη ερωτήματα, αφήνοντας όμως έξω τους μαθητές-υποψήφιους.



(α)



(β)

Ένα ορθογώνιο μήκους l (σώμα Σ), μάζας M=40kg κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή, αφήνουμε πάνω του, μια σφαίρα μάζας m=20kg και ακτίνας R=0,2m, χωρίς να έχει αρχική ταχύτητα ούτε να περιστρέφεται. Μετά από λίγο, τη στιγμή t_1, το σώμα Σ έχει ταχύτητα $υ_σ$=4m/s, η ταχύτητα του κέντρου της σφαίρας είναι $υ_{cm}$=1m/s, ενώ το σημείο επαφής της Γ με το Σ, απέχει οριζόντια κατά (ΜΓ)= d=0,6m από το μέσον Μ του ορθογωνίου (σχήμα α).

Δίνεται η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο της I= 2/5 mR^2 και g=10m/s^2, ενώ ο συντελεστής τριβής μεταξύ σφαίρας και σανίδας είναι μ=0,5.

1) Αν το σώμα Σ είναι μια λεπτή σανίδα, να υπολογιστεί η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, τη παραπάνω στιγμή:

   α) για το σύστημα, β) για τη σφαίρα, γ) για τη ράβδο.

   i) Ως προς ένα ακίνητο σημείο $Γ_1$, στη θέση που είναι και το σημείο Γ της σανίδας.

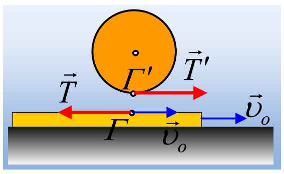
   ii) Ως προς ακίνητο σημείο $Μ_1$ στη θέση του μέσου Μ της σανίδας:

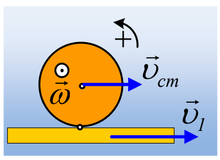
   iii) Ως προς ακίνητο σημείο $Ο_1$ στη θέση του κέντρου Ο της σφαίρας:

2) Αν το ορθογώνιο είναι κιβώτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχήμα β), ύψους h=0,6m να απαντήσετε ξανά στα παραπάνω ερωτήματα.

Απάντηση:

1) Στην περίπτωση της λεπτής σανίδας, θεωρούμε ότι αυτή έχει αμελητέο πάχος.





Τη στιγμή που αφήνεται πάνω στη σανίδα η σφαίρα, υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ των δύο σωμάτων και αναπτύσσεται δύναμη τριβής, όπως στο σχήμα, όπου T=μ·N$_1$=μmg=100N. Αποτέλεσμα της δράσης της τριβής αυτής στην σφαίρα, είναι να επιταχύνεται προς τα δεξιά, ενώ θα περιστραφεί αντιωρολογιακά

Θεωρώντας την κίνηση της σφαίρας σύνθετη, αποτελούμενη από μια μεταφορική κίνηση και μια στροφική, έχουμε:

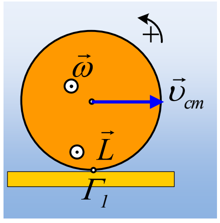
Μεταφορική κίνηση: $ΣF_x=m·α_{cm} \rightarrow T'=m·α_{cm} \rightarrow α_{cm}$=5m/s^2.

Στροφική κίνηση: $Στ=I·α_{γων} \rightarrow T'R=\frac{2}{5}mR^2 a_{γων} \rightarrow T'=\frac{2}{5}mR\cdot a_{γων} \rightarrow α_{γων}$=62,5rad/s^2.

Αλλά, με βάση τα παραπάνω, η μεταφορική κίνηση θα είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, ενώ η περιστροφική, θα είναι στροφική ομαλά επιταχυνόμενη και μετά από χρονικό διάστημα t θα ισχύουν:

$$\upsilon_{cm}=\alpha_{cm}\cdot t \quad \kappa\alpha\iota \quad \omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t$$

οπότε με διαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:



$$\frac{\upsilon_{cm}}{\omega}=\frac{a_{cm}t}{a_{\gamma\omega\nu}t}=\frac{a_{cm}}{a_{\gamma\omega\nu}}=\frac{5}{62,5}\rightarrow \omega=12,5rad/s$$

i) α) Έτσι ως προς το σημείο Γ_1 η **συνολική** στροφορμή του συστήματος είναι:

$$\vec{L}_{\Gamma_1}=\vec{L}_1+\vec{L}_2$$

Όπου $\vec{L}_1$ η στροφορμή της σανίδας και $\vec{L}_2$ η στροφορμή της σφαίρας.

Αλλά δεχόμενοι λεπτή τη σανίδα, η απόσταση x του φορέα της ταχύτητας της σανίδας από το Γ_1 είναι μηδενική με αποτέλεσμα $L_1=M\upsilon_\sigma\cdot x=0$, ενώ:

$$L_2=I_{cm}\omega-m\upsilon_{cm}R=\frac{2}{5}mR^2\omega-m\upsilon_{cm}R \rightarrow$$

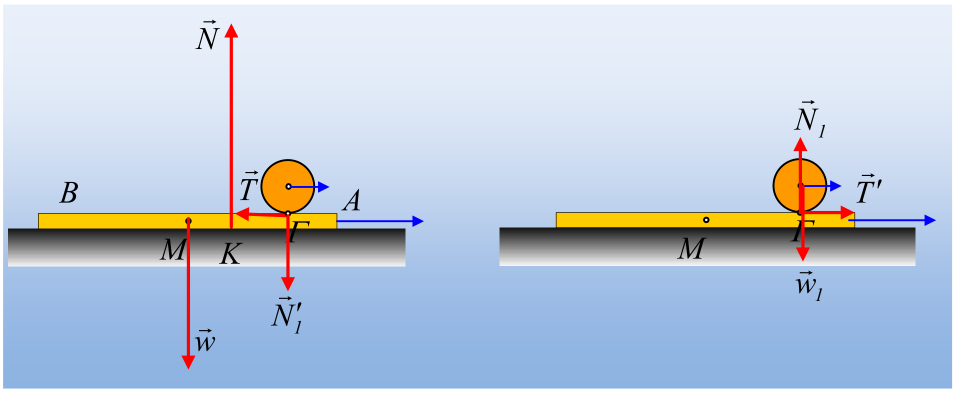
$$L_{\Gamma_1}=\frac{2}{5}mR^2\omega-m\upsilon_{cm}R=\left(\frac{2}{5}20\cdot 0,2^2\cdot 12,5-20\cdot 1\cdot 0,2\right)kg\cdot m^2/s=0\,.$$

Ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς το Γ_1, θα είναι ίσος:

$$\frac{dL}{dt}=M\frac{d\upsilon_\sigma}{dt}x+\left(\frac{2}{5}mR^2\cdot\frac{d\omega}{dt}-m\frac{d\upsilon_{cm}}{dt}R\right)=\frac{2}{5}mR^2a_{\gamma\omega\nu}-ma_{cm}R\rightarrow$$

$$\frac{dL}{dt}=\left(\frac{2}{5}20\cdot 0,2^2\cdot 62,5-20\cdot 5\cdot 0,2\right)kg\cdot m^2/s^2=0$$

Τι ακριβώς υπολογίσαμε; Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα του συστήματος.



Η σφαίρα ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση, συνεπώς N_1 =mg=200N=N_1΄, όπως και η σανίδα, οπότε N=Mg+N_1΄=600N. Η σανίδα εξάλλου δεν περιστρέφεται, οπότε $\Sigma\tau_M=0$ ή N·(ΜΚ)-N_1΄(ΜΓ)=0→

$$(KM)=\frac{N_1'}{N}(M\Gamma)=\frac{200N}{600N}0,6m=0,2m\,.$$

Αλλά τότε για το σύστημα $\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau_{\varepsilon\xi}$ όπου εξωτερικές δυνάμεις είναι τα βάρη και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου N, άρα:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = w\cdot(M\Gamma_1) - N\cdot(K\Gamma_1) = 400N\cdot 0{,}6m - 600N\cdot 0{,}4m = 0$$

Πράγμα που πρακτικά σημαίνει ότι η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή…

β) Για τη σφαίρα:

$$L'_{\Gamma_1} = \frac{2}{5}mR^2\omega - m\upsilon_{cm}R = \left(\frac{2}{5}20\cdot 0{,}2^2\cdot 12{,}5 - 20\cdot 1\cdot 0{,}2\right)kg\cdot m^2/s = 0.$$

Ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας ως προς το Γ_1, θα είναι ίσος:

$$\frac{dL'_{\Gamma_1}}{dt} = \Sigma\tau = 0$$

γ) Για τη σανίδα:

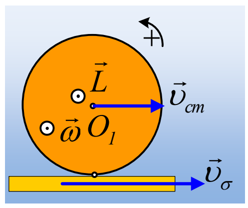
$L''_{\Gamma_1} = M\upsilon_\sigma .0$ και

$$\frac{dL''_{\Gamma 1}}{dt} = \Sigma\tau = w\cdot(M\Gamma_1) - N\cdot(K\Gamma_1) = 400N\cdot 0{,}6m - 600N\cdot 0{,}4m = 0$$

ii) α) Αλλά και για το σημείο M_1 ισχύουν ακριβώς τα ίδια, όταν μιλάμε για το **σύστημα**:

$$L_{M_1} = \frac{2}{5}mR^2\omega - m\upsilon_{cm}R = \left(\frac{2}{5}20\cdot 0{,}2^2\cdot 12{,}5 - 20\cdot 1\cdot 0{,}2\right)kg\cdot m^2/s = 0 \text{ και}$$

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = N\cdot(KM) - w_1\cdot(M\Gamma) = 600N\cdot 0{,}2m - 200N\cdot 0{,}6m = 0$$



β) Για τη σφαίρα:

$$L'_{M_1} = I\omega - m\upsilon_{cm}R = 0$$

$$\frac{dL'_{M_1}}{dt} = \Sigma\tau = T'y = 100N\cdot 0m = 0$$

γ) Για τη σανίδα:

$$L''_{M_1} = M\upsilon_\sigma d = 0$$

$$\frac{dL''_{M_1}}{dt} = \Sigma\tau = N(MK) + T\cdot y - N'_1\cdot(M\Gamma) = 600N\cdot 0{,}2m + 0 - 200N\cdot 0{,}6 = 0$$

iii) Ως προς το O_1 έχουμε:

α) Για το **σύστημα** σανίδα-σφαίρα:

$$\vec{L}_{O_1} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \rightarrow$$

$$L_{O_1} = M\upsilon_\sigma R + I\omega = \left(40\cdot 4\cdot 0{,}2 + \frac{2}{5}20\cdot 0{,}2^2\cdot 12{,}5\right)kg\cdot m^2/s = 36kg\cdot m^2/s$$

Κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τον αναγνώστη.

$$\frac{dL_{O_1}}{dt} = \Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = w\cdot(M\Gamma) - N\cdot(K\Gamma) = 400N\cdot 0{,}6m - 600N\cdot 0{,}4m = 0$$

β) Για τη σφαίρα:

$$L'_{O_1} = I\omega = \left(\frac{2}{5}20\cdot 0{,}2^2\cdot 12{,}5\right)kg\cdot m^2/s = 4kg\cdot m^2/s$$

$$\frac{dL'_{O_1}}{dt} = \Sigma\tau = T'R = 100N\cdot 0{,}2m = 20kg\cdot m^2/s^2.$$

Και τα δύο παραπάνω φυσικά μεγέθη είναι διανύσματα κάθετα στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τον αναγνώστη, στο σημείο O_1.

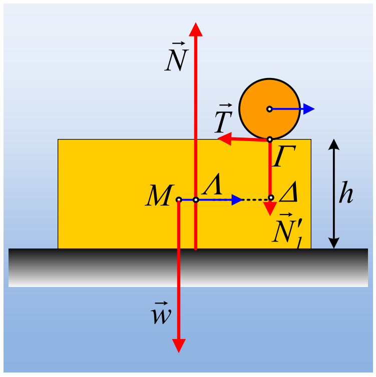
γ) Για τη σανίδα:

$$L''_{O_1} = M\upsilon_\sigma R = 40\cdot 4\cdot 0{,}2kg\cdot m^2/s = 32kg\cdot m^2/s$$

$$\frac{dL''_{O_1}}{dt} = \Sigma\tau = w\cdot(M\Gamma) - N(K\Gamma) - T\cdot R \rightarrow$$

$$\frac{dL''_{O_1}}{dt} = 400N\cdot 0{,}6m - 600N\cdot 0{,}4m - 100N\cdot 0{,}2m = -20kg\cdot m^2/s$$

2) Ερχόμαστε τώρα στο ορθογώνιο ύψους h. Στο διπλανό σχήμα, έχουμε σχεδιάσει ξανά τις δυνάμεις που ασκούνται τώρα στο ορθογώνιο. Αλλά και πάλι το ορθογώνιο δεν περιστρέφεται, οπότε $\Sigma\tau_M$=0 ή



$$N\cdot(M\Lambda) - N_1'(M\Delta) + T\cdot\frac{h}{2} = 0 \rightarrow$$

$$600\cdot(M\Lambda) - 200\cdot 0{,}6 + 100\cdot 0{,}3 = 0 \rightarrow$$

$$(M\Lambda) = 0{,}15m$$

Μπορούμε να σημειώσουμε μια μικρή μετατόπιση του φορέα της κάθετης αντίδρασης, η οποία πλησιάζει το μέσον Μ της σανίδας. Κατά τα λοιπά:

i) Ως προς το σημείο Γ_1:

α) Για το σύστημα:

$$L_{\Gamma_1} = \frac{2}{5}mR^2\omega - m\upsilon_{cm}R + M\upsilon_\sigma\frac{h}{2} \Rightarrow$$

$$L_{\Gamma_1} = \left(\frac{2}{5}20\cdot 0{,}2^2\cdot 12{,}5 - 20\cdot 1\cdot 0{,}2 + 40\cdot 4\cdot 0{,}3\right)kg\cdot m^2/s = 48kg\cdot m^2/s$$

Ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς το Γ_1, θα είναι ίσος:

$$\frac{dL_{\Gamma_1}}{dt} = \Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = w\cdot(M\Delta) - N\cdot(\Lambda\Delta) = 400N\cdot 0{,}6m - 600N\cdot 0{,}45m = -30kg\cdot m^2/s^2.$$

β) Για τη σφαίρα:

$$L'_{M_1} = I\omega - m\upsilon_{cm}R = 0$$

$$\frac{dL'_{M_1}}{dt}=\Sigma\tau=T'd=100N\cdot 0m=0$$

γ) Για το κιβώτιο:

$$L''_{\Gamma_1}=M\upsilon_\sigma\frac{h}{2}=40\cdot 4\cdot 0{,}3kg\cdot m^2/s=48kg\cdot m^2/s.$$

$$\frac{dL''_{\Gamma_1}}{dt}=\Sigma\tau=-N(\Lambda\Delta)+w\cdot(M\Delta)=-600N\cdot 0{,}45m+400N\cdot 0{,}6=-30kg\cdot m^2/s^2.$$

ii) Όμοια για το σημείο M_1:

α) Για το σύστημα:

$$L_{M_1}=\frac{2}{5}mR^2\omega-m\upsilon_{cm}\left(R+\frac{h}{2}\right)=\left(\frac{2}{5}20\cdot 0{,}2^2\cdot 12{,}5-20\cdot 1\cdot 0{,}5\right)kg\cdot m^2/s=-6kg\cdot m^2/s$$

$$\frac{dL_{M1}}{dt}=\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=N\cdot(\Lambda M)-w_1\cdot(M\Delta)\rightarrow\frac{dL_{M1}}{dt}=600N\cdot 0{,}15m-200N\cdot 0{,}6m=-30kg\cdot m^2/s^2.$$

β) Για τη σφαίρα:

$$L'_{M_1}=I\omega-m\upsilon_{cm}\left(R+\frac{h}{2}\right)=-m\upsilon_{cm}\frac{h}{2}=-20\cdot 1\cdot 0{,}3kg\cdot m^2/s=-6kg\cdot m^2/s$$

$$\frac{dL'_{M_1}}{dt}=\Sigma\tau=-T'\frac{h}{2}-w_1(M\Delta)+N_1(M\Delta)=-100N\cdot 0{,}3m=-30kg\cdot m^2/s^2.$$

γ) Για το κιβώτιο:

$$L''_{M_1}=M\upsilon_\sigma\cdot x=0.$$

$$\frac{dL''_{M_1}}{dt}=\Sigma\tau=N(M\Lambda)-N'_1\cdot(M\Delta)+T\frac{h}{2}\rightarrow$$

$$\frac{dL''_{M_1}}{dt}=600N\cdot 0{,}15m-200N\cdot 0{,}6m+100N\cdot 0{,}3m=0$$

iii) Ως προς το O_1 έχουμε:

α) Για το σύστημα σανίδα-σφαίρα:

$$\vec{L}_{O_1}=\vec{L}_1+\vec{L}_2\rightarrow$$

$$L_{O_1}=M\upsilon_\sigma\left(R+\frac{h}{2}\right)+I\omega=\left(40\cdot 4\cdot 0{,}5+\frac{2}{5}20\cdot 0{,}2^2\cdot 12{,}5\right)kg\cdot m^2/s=84kg\cdot m^2/s$$

Κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τον αναγνώστη στο σημείο O_1.

$$\frac{dL_{O_1}}{dt}=\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=w\cdot(M\Delta)-N\cdot(\Lambda\Delta)=400N\cdot 0{,}6m-600N\cdot 0{,}45m=-30kg\cdot m^2/s^2.$$

Κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα στο σημείο O_1.

β) Για τη σφαίρα:

$$L'_{O_1}=I\omega=\left(\frac{2}{5}20\cdot 0{,}2^2\cdot 12{,}5\right)kg\cdot m^2/s=4kg\cdot m^2/s$$

$$\frac{dL'_{O_1}}{dt} = \Sigma\tau = T'R = 100N \cdot 0{,}2m = 20kg \cdot m^2 / s^2 .$$

Και τα δύο παραπάνω φυσικά μεγέθη είναι διανύσματα κάθετα στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τον αναγνώστη, στο σημείο O_1.

γ) Για τη σανίδα ως προς το O_1:

$$L''_{O_1} = M\upsilon_\sigma\left(R + \frac{h}{2}\right) = 40 \cdot 4 \cdot 0{,}5kg \cdot m^2 / s = 80kg \cdot m^2 / s$$

$$\frac{dL''_{O_1}}{dt} = \Sigma\tau = w \cdot (M\Delta) - N(\Lambda\Delta) - T \cdot R \rightarrow$$

$$\frac{dL''_{O_1}}{dt} = 400N \cdot 0{,}6m - 600N \cdot 0{,}45m - 100N \cdot 0{,}2m = -50kg \cdot m^2 / s^2 .$$

dmargaris@gmail.com