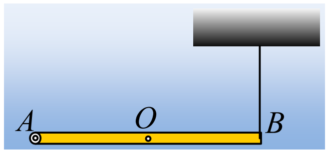
Μην ξεχνάμε τον άξονα περιστροφής.

Έχουμε πάρα πολλά προβλήματα, όπου ένα στερεό, όπως μια ράβδος, στρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα. Συνήθως στις περιπτώσεις αυτές επιλύουμε το πρόβλημα, «αφήνοντας στο απυρόβλητο» τον άξονα, με την έννοια ότι ξεχνάμε ή δεν θεωρούμε απαραίτητο να σχεδιάσουμε ή να βρούμε τη δύναμη που ασκεί ο άξονας στο στερεό. Προφανώς κάτι τέτοιο δεν είναι σωστό, είναι μια παράλειψη, η οποία μπορεί να μην έχει σοβαρές επιπτώσεις, αλλά σε άλλες περιπτώσεις μπορεί να οδηγεί σε εντελώς λανθασμένη επίλυση του προβλήματος, πέρα από το ότι, όταν λέμε σχεδιάζουμε τις δυνάμεις, προφανώς δεν πρέπει να εννοούμε σχεδιάζουμε …. τις μισές!

Ας ανιχνεύσουμε λοιπόν, μέσω κάποιων παραδειγμάτων, τη δύναμη που μπορεί να ασκεί ένας άξονας περιστροφής σε μια ράβδο.

Παράδειγμα 1ο:

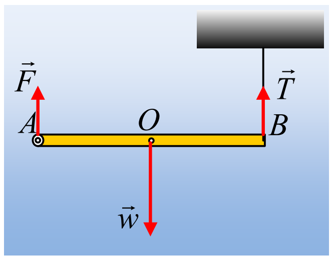
Μια ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους 2m και μάζας 3kg μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α. Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια, δεμένη στο άλλο της άκρο Β με κατακόρυφο νήμα, όπως στο σχήμα.



Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί ο άξονας στη ράβδο. Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο. Αυτές είναι το βάρος w, η τάση του νήματος Τ και μια δύναμη από τον άξονα F. Χωρίς δε, δεύτερη σκέψη, την σχεδιάζουμε όπως στο διπλανό σχήμα. Γιατί όμως η δύναμη από τον άξονα είναι έτσι; Αυτό δεν είναι δεδομένο!



Δεν ξέρουμε προς τα πού ασκείται δύναμη από τον άξονα!!! Την κατεύθυνσή της (αλλά και το μέτρο της) θα την προσδιορίσουμε με εφαρμογή των νόμων του Νεύτωνα. Δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή.

Ας έρθουμε λοιπόν στο πρόβλημά μας. Η ράβδος ισορροπεί, οπότε ισχύουν:

α) $\Sigma\vec{F}=0$.

Αλλά για να συμβαίνει αυτό, από τη στιγμή που το βάρος και η τάση του νήματος είναι κατακόρυφες δυνάμεις και η δύναμη από τον άξονα πρέπει να είναι κατακόρυφη! Γιατί; Γιατί η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$\vec{F}+\vec{T}+\vec{w}=0 \rightarrow \vec{F}=-(\vec{T}+\vec{w})$$

Ισοδύναμα, η παραπάνω συνθήκη θα μπορούσε να διατυπωθεί:

$$\Sigma\vec{F}=0 \rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x=0 \rightarrow F_x=0 & (1) \\ \Sigma F_y=0 \rightarrow F_y+T=w & (2) \end{cases}$$

Όπου F_x και F_y η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που ασκεί ο άξονας. Αλλά από την (1) προκύπτει ότι δεν υπάρχει οριζόντια συνιστώσα της δύναμης, οπότε η δύναμη είναι κατακόρυφη και

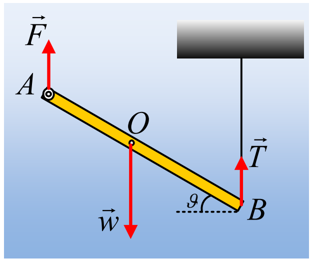
F_y=F.

β) Στ=0, ως προς οποιοδήποτε σημείο. Οπότε παίρνοντας τις ροπές ως προς το άκρο Β έχουμε (θεωρώντας την αντιωρολογιακή φορά θετική:

$$-F\cdot \ell + w\cdot \frac{\ell}{2} + T\cdot 0 = 0 \rightarrow F = \frac{w}{2} = \frac{mg}{2} = 15N$$

Παρατήρηση:

Η κατάσταση είναι απολύτως η ίδια, άσχετα με τη θέση της ράβδου. Έτσι αν η ράβδος σχηματίζει κάποια γωνία θ με την οριζόντια θέση, όπως στο διπλανό σχήμα, οι δυνάμεις θα ήταν ίδιες. Πράγματι ισχύουν οι παραπάνω εξισώσεις, οπότε παίρνοντας τις ροπές, ως προς το Β έχουμε:

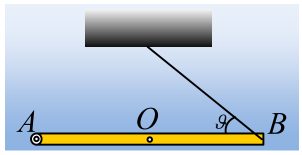


$$\Sigma\tau = 0 \rightarrow$$

$$-F\cdot \ell \cdot \sigma\upsilon\nu\vartheta + w\cdot \frac{\ell}{2}\cdot \sigma\upsilon\nu\vartheta + T\cdot 0 = 0 \rightarrow F = \frac{w}{2} = \frac{mg}{2} = 15N$$

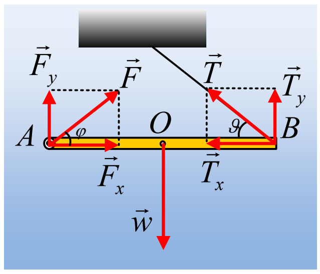
Παράδειγμα 2ο:

Η παραπάνω ράβδος ισορροπεί ξανά σε οριζόντια θέση, αλλά τώρα το νήμα στο άκρο Β, σχηματίζει γωνία θ=30° με την οριζόντια διεύθυνση, όπως στο σχήμα. Να υπολογιστεί η δύναμη (μέτρο και κατεύθυνση) που ασκεί ο άξονας τη ράβδο.



Απάντηση:

Σχεδιάζουμε ξανά τις δυνάμεις που ασκούνται τώρα στη ράβδο, αλλά αφού η τάση του νήματος δεν είναι τώρα κατακόρυφη, δεν θα είναι κατακόρυφη και η δύναμη που θα ασκεί ο άξονας. Αναλύοντας τις δυνάμεις σε οριζόντιες και κατακόρυφες συνιστώσες, παίρνουμε από τη συνθήκη ισορροπίας:



$$\Sigma\vec{F} = 0 \rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow F_x = T_x & (1) \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow F_y + T_y = w & (2) \end{cases}$$

Εξάλλου παίρνοντας τις ροπές ως προς το άκρο Α έχουμε (θεωρώντας την αντιωρολογιακή φορά θετική:

$$-T_y\cdot \ell + w\cdot \frac{\ell}{2} + F\cdot 0 = 0 \rightarrow T_y = \frac{w}{2} = \frac{mg}{2} = 15N$$

Αλλά $T_y = T\cdot\eta\mu\theta \rightarrow T = \frac{T_y}{\eta\mu\theta} = \frac{15}{\frac{1}{2}} = 30N$, οπότε $T_x = T\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = 30\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}N = 15\sqrt{3}N$.

Οπότε από την (1) παίρνουμε και $F_x = T_x = 15\sqrt{3}N$, ενώ από την (2), $F_y = w - T_y = 15N$.

Με εφαρμογή τώρα του πυθαγορείου θεωρήματος παίρνουμε:

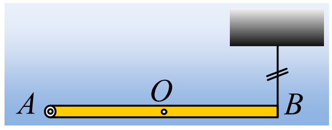
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\left(15\sqrt{3}\right)^2 + 15^2}\,N = 30N$$

Ενώ για την κατεύθυνσή της: $\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{F_y}{F_x} = \dfrac{15}{15\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ή φ=30°.

Παρατήρηση:

Αν συγκρίνουμε τα αποτελέσματα στις δύο παραπάνω περιπτώσεις θα διαπιστώσουμε ότι ο άξονας «είναι εκεί» και ασκεί κάθε φορά, μια κατάλληλη δύναμη, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η ισορροπία…

Παράδειγμα 3ο:



Ας επιστρέψουμε στο 1ο παράδειγμα και κάποια στιγμή ας κόψουμε το κατακόρυφο νήμα.

i) Αμέσως μετά, η δύναμη που ασκεί ο άξονας στη ράβδο:

α) θα παραμείνει κατακόρυφη με μέτρο 15Ν, όπως και πριν.

β) Θα παραμείνει κατακόρυφη με μέτρο 30Ν.

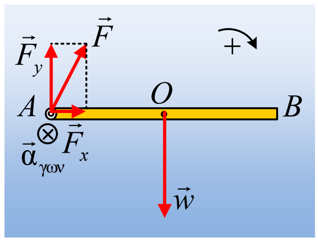
γ) Άλλο αποτέλεσμα.

ii) Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί ο άξονας στην σανίδα την παραπάνω στιγμή.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα στο Α, $I = \frac{1}{3}m\ell^2$.

Απάντηση:

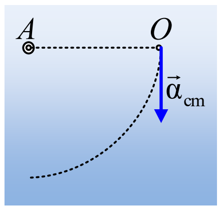
i) Μόλις κόψουμε το νήμα, η ράβδος θα αρχίσει να στρέφεται γύρω από τον άξονα στο άκρο της Α. Αλλά τότε έχουμε μια νέα κατάσταση, για την οποία η τιμή 15Ν, που βρήκαμε στο 1ο παράδειγμα, δεν έχει καμιά σχέση. Η τιμή 15Ν προέκυψε από μια ισορροπία, η οποία έχει καταστραφεί!!! Αλλά και η τιμή 30Ν παραπέμπει σε ισορροπία με το βάρος που είναι 30Ν, πράγμα που και πάλι δεν ισχύει. Δεν μένει παρά να δεχθούμε το γ)!



ii) Έστω ότι ο άξονας ασκεί την πλάγια δύναμη F, την οποία μπορούμε να αναλύσουμε σε μια οριζόντια και μια κατακόρυφη συνιστώσα, όπως στο διπλανό σχήμα. Παίρνοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση και θεωρώντας την ωρολογιακή φορά θετική έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\cdot a_{\gamma\omega\nu} \to w\cdot\frac{\ell}{2} = I\cdot a_{\gamma\omega\nu} \to$$

$$mg\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{1}{3}m\ell^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} \to a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2\ell}$$



Αλλά τότε το μέσον Ο της ράβδου, το κέντρο μάζας της, εκτελεί κυκλική κίνηση κέντρου Α και ακτίνας R=$\frac{\ell}{2}$, αποκτώντας επιτάχυνση:

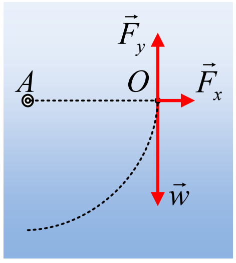
$$a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu}R = \frac{3g}{2\ell}\frac{\ell}{2} = \frac{3}{4}g$$

Με διεύθυνση κατακόρυφη, εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά, όπως στο σχήμα.

Ας έρθουμε τώρα στον ορισμό του κέντρου μάζας:

> **«Κέντρο μάζας (cm) ενός στερεού σώματος ονομάζεται το σημείο εκείνο που κινείται όπως ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με τη μάζα του σώματος, αν σε αυτό ασκούνταν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα».**

Τι μας λέει ο παραπάνω ορισμός; Μπορούμε να «δούμε» το στερεό ως υλικό σημείο στο κέντρο μάζας Ο, πάνω στο οποίο ασκούνται οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο, όπως στο σχήμα.



Αλλά τότε ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα για την κίνηση αυτού του υλικού σημείου μας δίνει:

$$\Sigma F_x = F_x = m\cdot\alpha_x = m\cdot\alpha_\kappa = m\frac{\upsilon_{cm}^2}{R} = 0 \ \ \kappa\alpha\iota$$

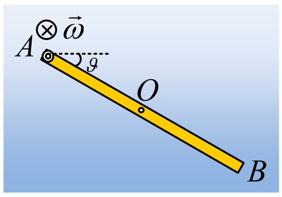
$$\Sigma F_y = m\cdot\alpha_y = m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow \ w - F_y = m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow$$

$$F_y = mg - m\alpha_{cm} = mg - m\frac{3}{4}g = \frac{1}{4}mg = \frac{1}{4}3\cdot 10N = 7{,}5N$$

Αλλά αφού F_x=0, η δύναμη τελικά από τον άξονα είναι κατακόρυφη, με φορά προς τα πάνω και μέτρο F=7,5N.

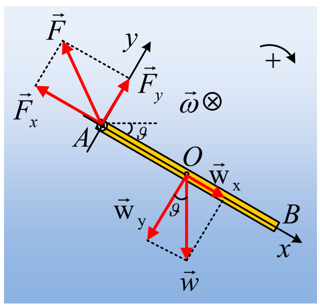
Παράδειγμα 4^o:

Η ράβδος του προηγούμενου παραδείγματος, πέφτοντας, μετά από λίγο σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ=30°, έχοντας αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα $\omega=\sqrt{7{,}5}rad/s$. Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί ο άξονας στη ράβδο στη θέση αυτή.



Απάντηση:

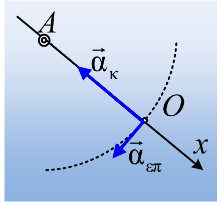
Έστω F η δύναμη που ασκεί τώρα ο άξονας. Αναλύουμε τις δυνάμεις σε δυο κάθετους άξονες x και y, όπου τώρα ο άξονας x έχει τη διεύθυνση της ράβδου, παίρνοντας την εικόνα του διπλανού σχήματος.



Παίρνοντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση και θεωρώντας την ωρολογιακή φορά θετική έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \ w_y\cdot\frac{\ell}{2} = I\cdot a_{\gamma\omega\nu} \ \rightarrow$$

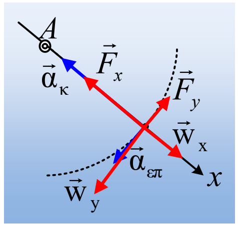
$$mg\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{1}{3}m\ell^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \ a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2\ell}\sigma\upsilon\nu\theta$$



Αλλά τότε το μέσον Ο της ράβδου, το κέντρο μάζας της, εκτελεί κυκλική κίνηση κέντρου Α και ακτίνας R=$\frac{\ell}{2}$, αποκτώντας επιτρόχια επιτάχυνση (επιτάχυνση εφαπτόμενη στην τροχιά η οποία είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της γραμμικής του ταχύτητας):

$$a_{\varepsilon\pi} = a_{\gamma\omega\nu} R = \frac{3g}{2\ell}\cdot \sigma\upsilon\nu\theta \frac{\ell}{2} = \frac{3}{4} g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

Και μια κεντρομόλο επιτάχυνση (υπεύθυνη για την μεταβολή στη διεύθυνση της ταχύτητας του κέντρου μάζας) μέτρου $a_\kappa = \frac{\upsilon_{cm}^2}{R} = \omega^2 \frac{\ell}{2}$.



Αλλά τότε ο 2ος νόμος του Νεύτωνα, για την κίνηση αυτού του υλικού σημείου, μας δίνει:

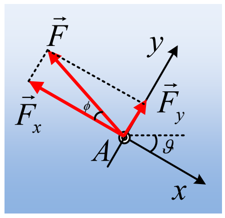
$$\Sigma F_x = m\cdot \alpha_x = m\cdot \alpha_\kappa \rightarrow$$

$$F_x - mg\cdot \eta\mu\theta = m\omega^2 \frac{\ell}{2} \rightarrow$$

$$F_x = mg\cdot \eta\mu\theta + m\omega^2 \frac{\ell}{2} = 30\cdot \frac{1}{2} N + 3\left(\sqrt{7{,}5}\right)^2 \frac{2}{2} N = 37{,}5N$$

$$\Sigma F_y = m\cdot \alpha_y = m\cdot \alpha_{cm} \rightarrow \ w_y - F_y = m\cdot \alpha_{cm} \rightarrow$$

$$F_y = mg\cdot \sigma\upsilon\nu\theta - m\alpha_{cm} = mg\cdot \sigma\upsilon\nu\theta - m\frac{3}{4} g\cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{4} mg\cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{4} 3\cdot 10 \frac{\sqrt{3}}{2} N = 6{,}5N$$



Οπότε το μέτρο της ασκούμενης από τον άξονα δύναμης, είναι:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{37{,}5^2 + 6{,}5^2} N = 38N$$

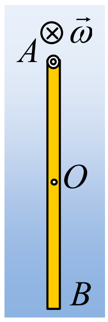
Ενώ η διεύθυνσή της σχηματίζει με τη διεύθυνση x γωνία φ, όπου

$$\varepsilon\phi\phi = \frac{F_y}{F_x} = \frac{6{,}5}{37{,}5} \approx 0{,}17$$

Οπότε φ=0,17rad (για μικρές γωνίες ισχύει ότι εφφ ≈ φ) ή φ=9,8°.

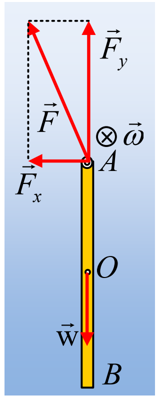
(Προφανώς κανείς δεν πρόκειται να σας ζητήσει την τιμή της γωνίας!!! Ο παραπάνω υπολογισμός της, αποσκοπούσε να δείξει ότι η δύναμη F που ασκεί ο άξονας, δεν είναι κατακόρυφη, αφού σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία z=φ+θ=39,8°).

Παράδειγμα 5ο:



Ας συνεχίσουμε για λίγο το ταξίδι της ράβδου και ας την δούμε τη στιγμή που γίνεται κατακόρυφη, έχοντας γωνιακή ταχύτητα $\omega = \sqrt{15} rad/s$. Πόση δύναμη ασκεί στη θέση αυτή ο άξονας στη ράβδο;

Απάντηση:



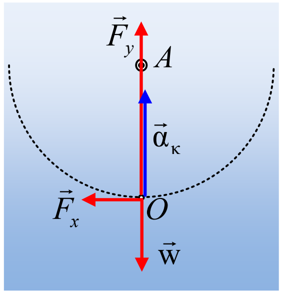
Έστω ότι ο άξονας ασκεί μια δύναμη **F** στη ράβδο η οποία αναλύεται σε δυο συνιστώσες F_x και F_y οριζόντια και κατακόρυφη αντίστοιχα, όπως στο σχήμα.

Παίρνοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση και θεωρώντας την ωρολογιακή φορά θετική έχουμε:

$$\Sigma\tau_A = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow 0 = I\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}=0.$$

Αλλά τότε το κέντρο μάζας Ο, το οποίο εκτελεί κυκλική κίνηση δεν έχει επιτρόχια επιτάχυνση (ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητάς του είναι μηδενικός).

Οπότε ο 2ος νόμος του Νεύτωνα, για την κίνηση αυτού του υλικού σημείου, μας δίνει:



$$\Sigma F_x = m\cdot\alpha_x = m\cdot\alpha_{\varepsilon\pi} \rightarrow F_x=0$$

$$\Sigma F_y = m\cdot\alpha_y = m\cdot\alpha_\kappa \rightarrow F_y - w = m\cdot\alpha_\kappa \rightarrow$$

$$F_y = mg + m\alpha_\kappa = mg + m\omega^2\frac{\ell}{2} = 30N + 3\cdot\left(\sqrt{15}\right)^2\frac{2}{2}N = 75N$$

Συμπέρασμα; Ο άξονας ασκεί στη ράβδο κατακόρυφη δύναμη $F=F_y=75N$, προφανώς πολύ μεγαλύτερη του βάρους της ράβδου.

dmargaris@gmail.com